Université Pierre et Marie Curie | Probabilités (UE 1)
M1 MEEF | 2016-2017

Interrogation du 6 mars 2017

Durée : 2 heures

On veillera à justifier la convergence de toutes les intégrales manipulées.

Questions de cours

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de carré intégrable. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}X_1$.

Exercice 1

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$, et soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que la variable aléatoire U^α admet une densité que l'on explicitera.

Exercice 2

Dans cet exercice, on fixe deux réels $a > 0$ et $b > 0$.

1. Montrer que l'expression
$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$
définit une fonction $\Gamma :]0,\infty[\to \mathbb{R}$.

2. Montrer la relation, pour tout $a > 0$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

3. Montrer que la fonction $\gamma_{a,b} : x \mapsto C_{a,b}x^{a-1}e^{-bx}\mathbf{1}_{x>0}$ est une densité de probabilité, pour une certaine constante $C_{a,b}$ dont on explicitera la valeur en utilisant la fonction Γ.

4. Soit X une variable aléatoire de densité $\gamma_{a,b}$. Pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire $e^{\lambda X}$ est-elle intégrable ? Pour ces valeurs, donner une expression de $\mathbb{E}e^{\lambda X}$.

5. Montrer qu'une variable X de densité $\gamma_{a,b}$ est de carré intégrable. Donner l'espérance et la variance de X.