Université Pierre et Marie Curie
M1 MEEF

Probabilités (UE 1)
2016-2017

Interrogation du 6 mars 2017 : corrigé

Exercice 1

Soit f une fonction bornée quelconque. On a

$$\mathbb{E}f(U^\alpha) = \int_0^1 f(x^\alpha)dx.$$

On fait le changement de variable $y = x^\alpha$, d'où $dy = \alpha x^{\alpha-1}dx$ et $dx = \frac{1}{\alpha}y^{1/\alpha-1}dy$.

- Si $\alpha > 0$, on obtient :
$$\mathbb{E}f(U^\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 f(y)y^{1/\alpha-1}dy.$$
Cette égalité montre que U^α admet pour densité
$$x \mapsto \frac{1}{\alpha}x^{1/\alpha-1}\mathbf{1}_{0<x<1}.$$
- Si $\alpha < 0$, on obtient
$$\mathbb{E}f(U^\alpha) = \left(\frac{-1}{\alpha}\right)\int_1^\infty f(y)y^{1/\alpha-1}dy.$$
Cette égalité montre que U^α admet pour densité
$$x \mapsto \left(\frac{-1}{\alpha}\right)x^{1/\alpha-1}\mathbf{1}_{x>1}.$$

Exercice 2

1. La fonction $\varphi : x \mapsto x^{a-1}e^{-x}$ est continue sur $]0,\infty[$. Il suffit donc de montrer qu'elle est intégrable en 0 et en ∞ pour montrer que $\Gamma(a)$ est bien défini.

   En $x \to 0$, on a l'équivalent $x^{a-1}e^{-x} \sim x^{a-1}$. Or $x \mapsto x^{a-1}$ est intégrable en 0 si et seulement si $a > 0$, ce qui est bien le cas ici. La fonction φ est donc intégrable en 0.

   En $x \to \infty$, on a $x^{a-1}e^{-x} = o(e^{-x/2})$. Or la fonction $e^{-x/2}$ est intégrable en ∞, ce qui est donc aussi le cas de φ.

   En conclusion, φ est intégrable sur $]0,\infty[$, et la définition de Γ est donc licite.

2. On fait une intégration par parties :
$$\begin{aligned}\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x}dx = \lim_n \int_{1/n}^n x^a e^{-x}dx &= \lim_n \left[x^a(-e^{-x})\right]_{1/n}^n - \int_{1/n}^n ax^{a-1}(-e^{-x})dx \\ &= 0 - \int_0^\infty ax^{a-1}(-e^{-x})dx \\ &= a\Gamma(a).\end{aligned}$$

3. Comme en question 2, la fonction $\psi : x \mapsto x^{a-1}e^{-bx}$ est intégrable sur $]0,\infty[$ (car elle est continue, équivalente en 0 à x^{a-1} qui y est intégrable, et négligeable en ∞ devant $e^{-bx/2}$ qui y est intégrable). De plus, ψ est positive de sorte que la fonction
$$x \mapsto \psi(x) \times \left(\int_0^\infty \psi(t)dt\right)^{-1}$$
est une densité de probabilité. On a donc (on pose $u = bt$)
$$C_{a,b} = \left(\int_0^\infty t^{a-1}e^{-bt}dt\right)^{-1} = \left(\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{b^{a-1}}e^{-u}\frac{du}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{\Gamma(a)}{b^a}\right)^{-1} = \frac{b^a}{\Gamma(a)}.$$

4. Pour $\lambda \geq b$, on a $e^{\lambda x}x^{a-1}e^{-bx} \geq x^{a-1}$ qui n'est pas intégrable en ∞. Par conséquent, $e^{\lambda X}$ n'est pas intégrable dans ce cas. En revanche si $\lambda < b$, on a $e^{\lambda x}x^{a-1}e^{-bx} = x^{a-1}e^{-b'x}$, avec $b' = (b-\lambda) > 0$. Or on a déjà vu en question 3 que cette fonction est intégrable. On a alors

$$\mathbb{E}e^{\lambda X} = \int_0^\infty e^{\lambda x}C_{a,b}x^{a-1}e^{-bx}dx = \int_0^\infty C_{a,b}x^{a-1}e^{(\lambda-b)x}dx = \frac{C_{a,b}}{C_{a,b-\lambda}} = \frac{b^a}{(b-\lambda)^a} = \left(1-\frac{\lambda}{b}\right)^{-a}.$$

5. On a, pour tout $x > 0$, $x < e^x$, de sorte que pour tout $a > 0$, $ax < e^{ax}$, et donc $x^2 < a^{-2}e^{2ax}$. En prenant $a = b/4$, on obtient l'inégalité

$$0 \leq X^2 \leq \frac{16}{b^2}e^{bX/2}.$$

Or, on a vu à la question précédente que $e^{bX/2}$ était intégrable. Par conséquent, X^2 est intégrable.

On a ensuite :

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty xC_{a,b}x^{a-1}e^{-bx}dx = \int_0^\infty C_{a,b}x^a e^{-bx}dx = \frac{C_{a,b}}{C_{a+1,b}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)b} = \frac{a}{b}$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2C_{a,b}x^{a-1}e^{-bx}dx = \int_0^\infty C_{a,b}x^{a+1}e^{-bx}dx = \frac{C_{a,b}}{C_{a+2,b}} = \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)b^2} = \frac{a(a+1)}{b^2}.$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \frac{a(a+1)}{b^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b^2}.$$