Interrogation du 30 octobre 2017

Durée : 1 heure 30

Questions de cours

1. Donner la définition de la variance d'une variable aléatoire réelle.
2. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F. À quelle propriété de F est équivalente la proposition $\mathbb{P}(X = a) = 0$? et la proposition $\mathbb{P}(X \in]a, b[) = 0$?
3. Tracer la fonction de répartition d'une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 3) = 1/4$.

Exercice 1

On dispose d'une urne contenant une boules blanche et une boule noire. On réalise plusiseurs fois de suite l'expérience suivante :

- On tire une boule de l'urne.
- On remet cette boule dans l'urne, ainsi qu'une nouvelle boule de la même couleur.

En particulier, après $n-2$ tirages, l'urne contient n boules. On notera $B_{n,k}$ l'évènement *"Au bout du* $(n-2)^{\text{ème}}$ *tirage, l'urne contient* k *boules blanches et* $n-k$ *boules noires"*. Notamment $(B_{n,k})_{k=0,\ldots,n}$ constitue une partition de Ω, et on a $\mathbb{P}(B_{2,1}) = 1$. On utilisera aussi des notations du type A_b, A_n, A_{bb}, A_{bn}, etc., pour désigner les évènements décrivant les tirages. Par exemple, A_{bbn} désigne l'évènement *"On a tiré une boule puis blanche, puis une autre, puis une boule noire"*.

1. Construire un arbre de probabilité associé aux deux premiers tirages de l'expérience ci-dessus. Comment lire $\mathbb{P}(B_{4,2})$ sur cet arbre ?
2. Que valent les $\mathbb{P}(B_{n+1,q}|B_{n,k})$ pour $q = 0, \ldots, n$?
3. En déduire que pour tout $1 \leq k < n$, on a $\mathbb{P}(B_{n,k}) = \frac{1}{n-1}$.

Exercice 2

1. Soit X une variable aléatoire réelle telle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait
$$\mathbb{E}(e^{\theta X}) \leq e^{\theta^2/2}.$$
   (a) Montrer les relations, pour $\theta > 0$ et $\alpha > 0$:
$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) = \mathbb{P}(e^{\theta X} \geq e^{\theta\alpha}) \leq e^{\theta^2/2-\theta\alpha}.$$
   De même, montrer $\mathbb{P}(X \leq -\alpha) \leq e^{\theta^2/2-\theta\alpha}$.

   (b) En déduire la majoration
$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq 2e^{-\alpha^2/2}.$$
2. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(|X| \leq 1) = 1$ et $\mathbb{E}(X) = 0$.

   (a) On admet que la fonction $\varphi : t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(t) = \mathbb{E}(Xe^{tX})$ et $\varphi''(t) = \mathbb{E}(X^2e^{tX})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $(\ln \circ\varphi)''(t) \leq 1$ et en déduire la majoration $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$.

   Soit $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ une suite de n variables aléatoires indépendantes vérifiant $\mathbb{E}(X_i) = 0$ ainsi que $\mathbb{P}(|X_i| \leq 1) = 1$.

   (b) Montrer la majoration, pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{E}\left(e^{t(X_1+\ldots+X_n)}\right) \leq e^{nt^2/2}.$$
   (c) En déduire, pour $\alpha > 0$
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}\right| \geq \alpha\right) \leq 2e^{-\alpha^2/2}.$$