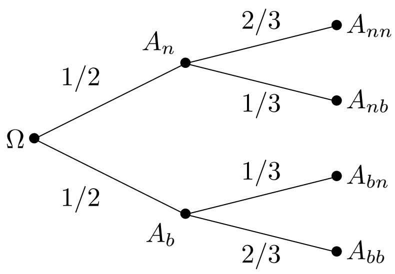
Université Pierre et Marie Curie — Probabilités (UE 1)
M1 MEEF — 2017-2018

Correction de l'interrogation du 30 octobre 2017

Exercice 1

1. L'arbre de probabilité ressemble à ceci :



   On a la décomposition $B_{4,2} = A_{nb} \cup A_{bn}$, où l'union est disjointe. On peut lire sur l'arbre que A_{nb} et A_{bn} ont tout deux probabilité $1/2 \times 1/3 = 1/6$. En conséquent, $\mathbb{P}(B_{4,2}) = \mathbb{P}(A_{nb}) + \mathbb{P}(A_{bn}) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

2. Supposons qu'il y ait k boules blanches dans l'urne, pour un total de n boules. Deux cas sont alors possibles :

   - si on tire une boule blanche, ce qui arrive avec probabilité k/n, il y aura ensuite $k+1$ boules blanches ;
   - si on tire une boule noire, ce qui arrive avec probabilité $1 - k/n$, il y aura ensuite k boules blanches.

   On trouve donc $\mathbb{P}(B_{n+1,k+1}|B_{n,k}) = \frac{k}{n}$ et $\mathbb{P}(B_{n+1,k}|B_{n,k}) = 1 - \frac{k}{n}$, ainsi que $\mathbb{P}(B_{n+1,q}|B_{n,k}) = 0$ si $q \notin \{k, k+1\}$.

3. On raisonne par récurrence sur n. Au rang $n = 1$, l'énoncé s'écrit simplement "$\mathbb{P}(B_{2,1}) = 1$", ce qui est vrai par hypothèse.

   Soit n un entier fixé. On suppose que pour $1 \leq k < n$, on a $\mathbb{P}(B_{n,k}) = \frac{1}{n-1}$. Alors, pour $1 < k < n$, la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_{n+1,k}) &= \mathbb{P}(B_{n+1,k}|B_{n,k})\mathbb{P}(B_{n,k}) + \mathbb{P}(B_{n+1,k}|B_{n,k-1})\mathbb{P}(B_{n,k-1}) \\ &= \left(1 - \frac{k}{n}\right)\frac{1}{n-1} + \frac{k-1}{n}\frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

   Pour $k = 1$ et $k = n$, on trouve

$$\mathbb{P}(B_{n+1,1}) = \mathbb{P}(B_{n+1,1}|B_{n,1})\mathbb{P}(B_{n,1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

   et

$$\mathbb{P}(B_{n+1,n}) = \mathbb{P}(B_{n+1,n}|B_{n,n-1})\mathbb{P}(B_{n,n-1}) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

   On a bien montré la propriété au rang $n+1$. Le résultat suit par récurrence.

Exercice 2

1. (a) Comme $\theta > 0$, la fonction $x \mapsto e^{\theta x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, pour tout réel x, on a $x \geq \alpha$ si et seulement $e^{\theta x} \geq e^{\theta \alpha}$. Par conséquent, on a l'égalité entre évènements
$$\{X \geq \alpha\} = \{e^{\theta X} \geq e^{\theta \alpha}\}.$$
Ils ont donc même probabilité, et l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire (positive) $e^{\theta X}$ donne
$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) = \mathbb{P}(e^{\theta X} \geq e^{\theta \alpha}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\theta X})}{e^{\theta \alpha}} \leq e^{\theta^2/2 - \theta \alpha},$$
où l'on a utilisé l'hypothèse sur $\mathbb{E}(e^{\theta X})$.
Enfin, si X vérifie $\mathbb{E}(e^{\theta X}) \leq e^{\theta^2/2}$, alors $-X$ vérifie la même propriété :
$$\mathbb{E}(e^{\theta(-X)}) = \mathbb{E}(e^{(-\theta)X}) \leq e^{(-\theta)^2/2} = e^{\theta^2/2}.$$
Par conséquent, le début de la question s'applique aussi à $-X$: $\mathbb{P}(X \leq -\alpha) = \mathbb{P}(-X \geq \alpha) \leq e^{\theta^2/2 - \theta \alpha}$.

   (b) On a $\{|X| \geq \alpha\} = \{X \geq \alpha\} \cup \{X \leq -\alpha\}$. Par conséquent
$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \mathbb{P}(X \geq \alpha) + \mathbb{P}(X \leq -\alpha) \leq 2e^{\theta^2/2 - \theta \alpha}.$$
On obtient le résultat voulu en choisissant $\theta = \alpha$ (noter que ce choix minimise la quantité $\theta^2/2 - \alpha\theta$).

2. (a) On a $(\ln \circ \varphi)' = \frac{\varphi'}{\varphi}$ d'où
$$(\ln \circ \varphi)''(t) = \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} - \left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)^2 \leq \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} = \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{sX})}{\mathbb{E}(e^{sX})}.$$
Comme X est à valeurs dans $[-1, 1]$, on a $X^2 e^{sX} \leq e^{sX}$, d'où
$$(\ln \circ \varphi)''(t) = \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{tX})}{\mathbb{E}(e^{tX})} \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{\mathbb{E}(e^{tX})} = 1.$$
En intégrant, on obtient, pour $t \geq 0$
$$(\ln \circ \varphi)'(t) = (\ln \circ \varphi)'(0) + \int_0^t (\ln \circ \varphi)''(s) ds \leq \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} + \int_0^t ds = \frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(1)} + t = 0 + t.$$
En intégrant une deuxième fois :
$$\ln(\varphi(t)) = \ln(\varphi(0)) + \int_0^t (\ln \circ \varphi)(s) ds \leq \ln(\varphi(0)) + \int_0^t s ds = \ln(\mathbb{E}(1)) + t^2/2 = t^2/2.$$
On a donc, pour $t > 0$, $\mathbb{E}(e^{tX}) = e^{\ln(\varphi(t))} \leq e^{t^2/2}$. La preuve est similaire pour $t < 0$.

   (b) Par indépendance des X_i, on a
$$\mathbb{E}\left(e^{t(X_1 + \ldots + X_n)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1} \ldots e^{tX_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) \ldots \mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) \leq e^{t^2/2} \ldots e^{t^2/2} = e^{nt^2/2}.$$

   (c) En posant $\theta = \sqrt{n} \times t$, on voit que la variable $Y = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$ vérifie
$$\mathbb{E}(e^{\theta Y}) = \mathbb{E}\left(e^{t(X_1 + \ldots + X_n)}\right) \leq e^{nt^2/2} = e^{\theta^2/2}.$$
On peut donc lui appliquer le résultat de la question (1b), qui donne le résultat cherché.