Universités Pierre et Marie Curie et Paris Diderot — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2017-2018

Interrogation du 14 décembre 2017

Durée : 1 heure 30

Questions de cours

1. Montrer qu'une suite croissante majorée converge.
2. Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Exercice 1

1. Montrer l'encadrement, pour tout $n \geq 2$
$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x \ln x} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k \ln k} \leq \int_{n}^{2n} \frac{dx}{x \ln x},$$
2. Montrer la relation
$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{n}^{2n} \frac{dx}{x \ln x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right)$$
3. En déduire l'équivalent
$$\lim_{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k \ln k} \sim \frac{\ln(2)}{\ln(n)}.$$

Exercice 2

Calculer la limite suivante :
$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{\sin(x)} + \ln(1-x) - 1}{(1-x)e^x - \cos(x)}$$

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum u_n$ converge. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

1. Montrer qu'on a pour tout entier $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n$$
Indication : on pourra écrire $u_k = R_{k-1} - R_k$, pour tout entier $k \geq 1$.
2. Montrer que si la série $\sum R_n$ converge, alors la série $\sum n u_n$ converge.
3. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} n u_n$ converge et on note $T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k u_k$ son reste d'ordre n. Montrer que $T_n \geq n R_n$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite $(nR_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
4. Montrer que les séries $\sum_{n\geq 0} R_n$ et $\sum_{n\geq 0} n u_n$ sont de même nature, et que lorsqu'elles convergent elles ont la même somme.