Interrogation du 14 décembre 2017 : corrigé

Exercice 1

1. La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ a pour dérivée $\ln(x)+1$ qui est strictement positive sur $]e^{-1},\infty[$. Par conséquent, $x \mapsto x\ln(x)$ est strictement positive et croissante sur $]1,\infty[$ et donc $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1,\infty[$. Pour tout $k \geq 2$ et pour tout x dans $[k,k+1]$, on a donc
$$\frac{1}{x\ln(x)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$
En intégrant cette inégalité sur $[k,k+1]$, on obtient
$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x\ln(x)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$
De même, en utilisant la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $[k-1,k]$ (pour $k \geq 3$), on obtient l'inégalité
$$\frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x\ln(x)}.$$
En sommant ces deux dernières inégalités de $k=n+1$ à $k=2n$, on obtient ensuite
$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x\ln(x)} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x\ln(x)}.$$

2. On remarque ensuite que
$$\left|\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x\ln(x)} - \int_n^{2n} \frac{dx}{x\ln(x)}\right| \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x\ln(x)} + \int_{2n}^{2n+1} \frac{dx}{x\ln(x)} \leq \frac{2}{n\ln(n)},$$
d'où le résultat.

3. $$\int_n^{2n} \frac{dx}{x\ln(x)} =\leq \ln(\ln(2n)) - \ln(\ln(n)) = \ln\left(1+\frac{\ln(2)}{\ln(n)}\right) \sim \frac{\ln(2)}{\ln(n)}.$$
D'après les deux premières questions, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n\ln(n)}$ est encadrée par deux suites équivalentes à $\frac{\ln(2)}{\ln(n)}$, ce qui permet de conclure.

Exercice 2

On trouve
$$\frac{e^{\sin(x)}+\ln(1-x)-1}{(1-x)e^x-\cos(x)} = \frac{-x^3/3+o(x^3)}{-x^3/3+o(x^3)} = 1+o(1).$$
La limite demandée vaut donc 1.

Exercice 3

1. En utilisant la relation $u_k = R_{k-1} - R_k$, on obtient
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k(R_{k-1}-R_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)R_k - \sum_{k=1}^{n} kR_k &= \sum_{k=0}^{n-1}((k+1)R_k - kR_k) - nR_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente on a $\sum_{k=1}^{n} ku_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} R_k$. Si $\sum R_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{n} ku_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} R_k$ (car les R_k sont positifs). La série $\sum nu_n$ est donc une série à terme général positif et à sommes partielles majorée ; elle est donc convergente.

3. On a $T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} ku_k \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} nu_k = nR_n$. Or, si $\sum nu_n$ converge, alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 comme suite des reste d'une série convergente. Comme $0 \leq nR_n \leq T_n$, on en déduite que $(nR_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend également vers 0.

4. On a déjà vu en question 2 que si $\sum R_n$ converge, alors $\sum nu_n$ converge aussi. Inversement, si $\sum nu_n$ converge, on sait que nR_n tend vers 0, et l'écriture $\sum_{k=0}^{n-1} R_k = nR_n + \sum_{k=1}^{n} ku_k$ montre que $\sum R_n$ est aussi une série convergente, dont la somme est donnée par $0 + \sum_{k=1}^{\infty} ku_k$. Les deux séries ont donc même nature, et même somme dans le cas où elle converge.