Université Pierre et Marie Curie
M1 MEEF

Probabilités (UE 1)
2017-2018

Interrogation du 8 janvier 2018

Durée : 1 heure 30

Questions de cours

1. Donner trois caractérisations équivalentes de l'indépendance de deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. Calculer la moyenne d'une variable de loi de Poisson de paramètre λ.
3. Donner la définition de la loi binomiale de paramètres n et p.

Exercice 1

Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ, et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On suppose que N est indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Quelle est la loi de la variable $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$?
2. Quelle est la loi de $N - Y$?
3. Les variables Y et $N - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Sur la planète Zglob, les années durent n jours, avec n très grand.

1. On considère un groupe de k Zglobiens. Quelle est la probabilité $p_n(k)$ pour qu'ils aient tous des anniversaires différents ?
2. Montrer la majoration
$$p_n(k) \leq e^{-k(k-1)/2n}.$$
On pourra écrire $p_n(k)$ comme un produit, puis utiliser l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$, valable pour tout réel x.
3. Montrer que pour tout $c > 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $k/n < \varepsilon$, alors on a la minoration
$$e^{-ck(k-1)/2n} \leq p_n(k).$$
4. Montrer que si $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite équivalente à $\lambda\sqrt{n}$ pour $\lambda > 0$, alors $p_n(k_n)$ converge vers une limite que l'on explicitera.