

Correction de l'interrogation du 8 janvier 2018

Exercice 1

1. On utilise la formule des probabilités totales avec la partition $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{N = n\}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\{Y = k\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}\{N = n\}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y = k, N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y = k|N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k \,\middle|\, N = n\right)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)\mathbb{P}(N = n).
\end{aligned}$$

La dernière égalité découle de l'indépendance de N et des (X_i). Ensuite, on utilise le fait que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale de paramètres (n, p) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} &= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, Y suit la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

2. On a l'egalité $N - Y = \sum_{i=1}^{N}(1 - X_i)$. Or, les $1 - X_i$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1 - p$. Par conséquent, on est dans les hypothèses de la question 1, et on en déduit que $N - Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $(1 - p)\lambda$.

3. On a, pour deux entiers k et q,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k, N - Y = q) = \mathbb{P}(Y = q, N = q + k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{q+k} X_i = q, N = q + k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{q+k} X_i = q\right)\mathbb{P}(N = q + k)
\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise l'indépendance de N et des (X_i). Ensuite, comme N est de loi de Poisson et $\sum_{i=1}^{q+k} X_i$ est de loi binomiale, on a

$$\mathbb{P}(Y = k, N - Y = q) = \binom{q+k}{q}p^q(1-p)^k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{q+k}}{(q+k)!} = e^{-\lambda}\left(\frac{(1-p)^k\lambda^k}{k!}\right) \times \left(\frac{p^q\lambda^q}{q!}\right).$$

Comme $P(Y = k, N - Y = q)$ a la forme d'un produit d'une fonction de q et d'une fonction de k, on en déduit que Y et $N - Y$ sont indépendantes. Au passage, cette écriture aurait aussi permis de déduire que Y et $N - Y$ suivent des lois de Poisson.

Exercice 2

1. Si on numérote les k Zglobiens de 1 jusqu'à n, et qu'on considère la fonction qui à q associe la date d'anniversaire du $q$ième Zglobien, la question revient a trouver la probabilité qu'une fonction de $\{1,\ldots,k\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$ soit injective. Sans hypothèses supplémentaires, on suppose que la fonction en question est choisie uniformément parmi toutes les fonctions possibiles. Le nombre de fonctions de $\{1,\ldots,k\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$ est n^k, et le nombre d'injections correspondant est $\frac{n!}{(n-k)!}$. La probabilité est donc

$$p_n(k) = \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - i/n)\,.$$

2. Comme $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout réel x, on a

$$p_n(k) = \prod_{i=0}^{k-1}(1 - i/n) \leq \prod_{i=0}^{k-1} e^{-i/n} = e^{\sum_{i=0}^{k-1} -i/n} = e^{-k(k-1)/2n}.$$

3. Soit $c > 1$. On a $e^{-cx} = 1 - cx + o(x)$, par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $x \in [0, \varepsilon]$, on a $e^{-cx} \leq 1 - x$. Pour $k/n < \varepsilon$, tout les entiers $0 \leq i < k$ vérifient également $i/n < \varepsilon$, de sorte que $e^{-ci/n} \leq (1 - i/n)$. On a donc

$$e^{-ck(k-1)/2n} = \prod_{i=0}^{k-1} e^{-ci/n} \leq \prod_{i=0}^{k-1}(1 - i/n) = p_n(k).$$

4. Si k_n est équivalent à $\lambda\sqrt{n}$, alors on a $k_n/n \sim \lambda/\sqrt{n}$, et k_n/n converge donc vers 0. Pour tout $c > 1$, k_n/n sera donc inférieur au ε définit à la question précédente, pour n suffisamment grand. On a alors, pour n suffisamment grand,

$$e^{-ck_n(k_n-1))/2n} \leq p_n(k_n) \leq e^{-k_n(k_n-1)/2n}.$$

   Les deux termes qui encadrent $p_n(k_n)$ convergent respectivement vers $e^{-c\lambda^2/2}$ et vers $e^{-\lambda^2/2}$. Comme c est arbitraiement proche de 1, le terme de gauche peut être rendu arbitrairement proche de $e^{-\lambda^2/2}$, ce qui montre que $p_n(k_n)$ converge vers $e^{-\lambda^2/2}$.