Universités Pierre et Marie Curie et Paris Diderot | Analyse (UE 3)
M1 MEEF | 2017-2018

Interrogation du 15 février 2018

Durée : 1 heure 30

Exercice 1

Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$ et préciser son rayon de convergence.

Exercice 2

Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Exercice 3

On considère la série :

$$\sum a^n \sin(b^n \pi x) \tag{1}$$

où $a > 0$ et $b > 0$ sont deux réels strictement positif et $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner une condition simple sur a et b qui assure que la série (1) converge et que sa somme définit une fonction continue de x.
2. Donner une condition simple sur a et b qui assure que la somme de la série (1) est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en x.
3. À partir de maintenant, on considère le cas $b = 2$ et $1/2 < a < 1$. Montrer que la série (1) converge pour tout x réel ; on notera sa somme $F_a(x)$:

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(2^n \pi x).$$

4. Montrer l'inégalité $F_a(2^{-k}) \geq a^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que F_a n'est pas dérivable en 0.
5. En remarquant que l'on peut écrire

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{N} a^n \sin(2^n \pi x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a^n \sin(2^n \pi x).$$

où la deuxième somme est une fonction périodique dont on précisera la période, montrer que la fonction F_a est continue mais n'est dérivable en aucun réel de la forme $\frac{k}{2^N}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}$.