Interrogation du 15 février 2018 : corrigé

Exercice 1

Le polynôme $1+x-2x^2$ se factorise en $(1-x)(1+2x)$, qui est positif pour $x \in]-1/2, 1[$. Par conséquent, on a pour $x \in]-1/2, 1[$

$$\ln(1+x-2x^2) = \ln((1-x)(1+2x)) = \ln(1-x)) + \ln(1+2x).$$

La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence de 1, et de même $x \mapsto \ln(1+2x)$ est développable en série entière en 0 avec rayon $1/2$. Leur somme est donc développable en série entière en 0 avec un rayon de $1/2$ (le minimum des deux rayons), avec (pour $|x| < 1/2$)

$$\ln(1+x-2x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n - 1}{n} x^n.$$

Exercice 2

On étudie la série dérivée, donnée par

$$\sum \frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1} = \sum x^{2n}.$$

Il s'agit d'une série géométrique de raison x^2, qui converge donc si et seulement si $|x^2| < 1$. La série dérivée a donc pour rayon de convergence 1, ce qui implique que la série initiale avait également pour rayon de convergence 1.

Enfin, pour $|x| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

En primitivant terme à terme (ce qui est justifié pour les séries entières), on obtient que la série initiale vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Exercice 3

1. On a $\sup_{\mathbb{R}} |a^n \sin(b^n \pi x)| = a^n$. Par conséquent, si $|a| < 1$, la série (1) converge normalement et donc uniformément. Comme les fonctions intervenant dans la série sont continues, la somme est elle aussi continue.

2. La série (1) converge en $x = 0$, et ce, quelles que soient les valeurs de a et b. De plus le terme général de la série est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Par conséquent, pour que la somme de la série soit de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit que la série des dérivées converge uniformément.

   La série des dérivées est donnée par

   $$\sum (ab)^n \pi \cos(b^n \pi x).$$

   On a $\sup_{\mathbb{R}} |(ab)^n \pi \cos(b^n \pi x)| = \pi |ab|^n$. Par conséquent il suffit d'avoir $|ab| < 1$ pour que la série dérivée converge normalement, et donc uniformément.

   En somme, sous la condition $|ab| < 1$, la série (1) converge[1] et sa somme définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

[1] Remarquer que si de plus $|a| < 1$, alors la série (1) converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors que la condition $|ab| < 1$ entraîne seulement une convergence uniforme sur tout segment.

3. La série (1) converge, puisqu'on est dans le cas $|a| < 1$ qui implique la convergence (voir question 1.).

4. Par définition, on a

$$F_a(2^{-k}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(2^{n-k}\pi) = \sum_{n=0}^{k-1} a^n \sin(2^{n-k}\pi).$$

La dernière égalité vient du fait que $\sin(q\pi) = 0$ pour tout entier q, et que 2^{n-k} est entier pour tout $n \geq k$. Ensuite, comme $\sin(x) \geq 0$ pour $0 \leq x \leq \pi$,

$$F_a(2^{-k}) = \sum_{n=0}^{k-1} a^n \sin(2^{n-k}\pi) \geq a^{k-1} \sin(\pi/2) = a^{k-1}.$$

Comme de plus $F(0) = 0$, le taux d'accroissement de F_a en 0 vérifie

$$\frac{F(2^{-k}) - F(0)}{2^{-k}} \geq \frac{a^{k-1}}{2^{-k}} = (2a)^k/a.$$

Or $2a > 1$, donc $\frac{F(2^{-k})-F(0)}{2^{-k}} \to \infty$ pour $k \to \infty$. La fonction F n'est donc pas dérivable en 0.

5. La fonction sinus étant 2π-périodique, la somme $\sum_{n=N+1}^{\infty} a^n \sin(2^n \pi x)$ définit une fonction 2^{-N} périodique. Par conséquent, F_a peut s'écrire comme la somme d'une fonction dérivable (somme finie de sinus) et d'une fonction 2^{-N} périodique. Par conséquent, F_a est dérivable en 0 si et seulement si elle est dérivable en tout point de la forme $k/2^N$. Comme F_a n'est pas dérivable en 0, on en déduit qu'elle n'est dérivable en aucun point de la forme $k/2^N$, pour tous k et N.

En fait, il serait possible de montrer que dès que a et b vérifient $|a| < 1$ et $|ab| \geq 1$, la somme de la série (1) définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en *aucun* point. Cette fonction est connue sous le nom de *fonction de Weierstrass*.