Interrogation du 5 mars 2018

Durée : 1 heure 30

Question de cours

Rappeler la définition d'une variable de loi exponentielle de paramètre λ. Montrer qu'une telle variable est intégrable et donner son espérance.

Exercice 1

Pour deux entiers naturels $1 \leq k \leq n$, on pose $I_{k,n} = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx$.

1. (a) Montrer que pour tous entiers naturels $1 \leq k \leq n$, on a

$$I_{k,n} = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

   On pourra utiliser une récurrence soigneusement rédigée.

   (b) Montrer que la fonction $p_{k,n} : x \mapsto \frac{1}{I_{k,n}} x^{k-1}(1-x)^{n-k}\mathbf{1}_{x\in[0,1]}$ est une densité de probabilité.

2. Montrer qu'une variable aléatoire de densité $p_{k,n}$ est intégrable et donner son espérance.

3. (a) Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On considère n variables aléatoires réelles Y_1, ..., Y_n telles que Y_k ait une densité notée q_k. Soit K une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On suppose que K est indépendante des $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$. Montrer que la variable Y_K admet la densité $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n q_k$.

   (b) On suppose maintenant que pour $1 \leq k \leq n$ on a $q_k = p_{k,n}$. Montrer que Y_K suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Il existe une permutation σ (aléatoire !) telle que l'on ait

$$X_{\sigma(1)} \leq X_{\sigma(2)} \leq \dots \leq X_{\sigma(n)}.$$

On note $Y_i = X_{\sigma(i)}$. Autrement dit, $(Y_1, \dots, Y_n)$ est le $n$uplet obtenu en réordonnant $(X_1, \dots, X_n)$. On s'intéresse à la loi de Y_k pour $1 \leq k \leq n$.

1. Montrer l'égalité, pour $0 \leq k \leq n$:

$$\mathbb{P}(Y_k \leq x, Y_{k+1} > x) = \binom{n}{k}\mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_k \leq x, X_{k+1} > x, \dots, X_n > x).$$

   Par convention, on notera $Y_0 = 0$ et $Y_{n+1} = 1$.

2. Montrer l'égalité

$$\mathbb{P}(Y_k \leq x) = \sum_{q=k}^n \mathbb{P}(Y_q \leq x, Y_{q+1} > x).$$

3. Quelle est la fonction de répartition de Y_k ? En déduire que Y_k admet pour densité

$$x \mapsto \binom{n}{k} k x^{k-1}(1-x)^{n-k}\mathbf{1}_{[0,1]}.$$