Université Pierre et Marie Curie - Université Paris Diderot
Master MEEF 1ère année
2017 - 2018

Fondements de l'analyse

Raphaël Roux *

*. raphael.roux@upmc.fr

Version : `75d60f7 Tue Oct 10 17:58:38 2017 +0200`

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

Dans ce chapitre, nous allons définir le corps des réels. Pour cela, nous allons supposer connu le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Ce point de départ est est raisonnable puisqu'un rationnel est essentiellement la donnée d'un signe et de deux entiers positif, le numérateur et le dénominateur, et que les règles de calculs et de comparaisons sur les nombres rationnels se ramènent à des opérations sur les nombres entiers. Les nombres rationnels et les opérations s'y appliquant sont donc simples à décrire.

Pour construire l'ensemble des nombres réels à partir de celui des rationnels, l'intuition à garder en tête est qu'un nombre réel est une “limite” de nombres rationnels.

1.1 Définition de $\mathbb{R}$

Commençons par rappeler que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni de deux structures :

— d'une part, une structure de *corps* : les éléments de $\mathbb{Q}$ peuvent être ajoutés et multipliés, et on peut diviser par les éléments non-nuls ;

— d'autre part, une structure d'*ordre* (note 1) : on peut comparer deux rationnels.

De plus ces deux structures interagissent bien l'une avec l'autre au sens suivant :

Définition 1.1.1. *On dit que $\mathbb{K}$ est un corps ordonné si il est muni d'une structure de corps $(+,\times)$ et d'une structure d'ordre $(\leq)$ qui vérifient :*

— *si x, y et z sont trois éléments de $\mathbb{K}$ avec $x \leq y$, alors $x+z \leq y+z$;*

— *si x, y et z sont trois éléments de $\mathbb{K}$ avec $0 \leq z$ et $x \leq y$ alors, $xz \leq yz$.*

Propriété 1.1.2. *Muni de $+$, $\times$ et $\leq$, $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné.*

Par ailleurs, $\mathbb{Q}$ est une sorte de corps ordonné “universel”, puisque l'on a la propriété suivante :

Propriété 1.1.3. *Tout corps ordonné contient un unique sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$. L'isomorphisme en question est unique.*

Démonstration. On considère un corps ordonné $\mathbb{K}$. Par définition, $\mathbb{K}$ contient deux éléments distincts $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$. On remarque tout d'abord que $0_{\mathbb{K}} \leq 1_{\mathbb{K}}$. En effet, si on avait $1_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$, la multiplication par $1_{\mathbb{K}}$ changerait le signe de l'égalité, et on aurait $1_{\mathbb{K}} \times 1_{\mathbb{K}} \geq 0_{\mathbb{K}} \times 1_{\mathbb{K}}$, soit $1_{\mathbb{K}} \geq 0_{\mathbb{K}}$, ce qui est contradictoire.

(note 1). Dans tout ce chapitre les ensembles ordonnés considérés seront *totalement ordonnés* (si x et y sont deux éléments, alors au moins une des relations $x \leq y$ ou $y \leq x$ est vraie).

Esuite, on définit, pour tout entier naturel n positif, un élément de $\mathbb{K}$ par $n_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + \ldots + 1_{\mathbb{K}}$, où la somme comporte n termes. Comme on somme des termes positifs, pour $n > 0$, on a $n_{\mathbb{K}} \geq 1_{\mathbb{K}}$, et en particulier, $n_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$. On peut donc diviser par tout élément de la forme $n_{\mathbb{K}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, l'ensemble des $m_{\mathbb{K}}/n_{\mathbb{K}}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ isomorphe à $\mathbb{Q}$, par la bijection $m/n \mapsto m_{\mathbb{K}}/n_{\mathbb{K}}$. Cette bijection est la seule possible, car l'image de $n = 1+1+\ldots+1$ ne peut être que $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \ldots + 1_{\mathbb{K}} = n_{\mathbb{K}}$, et par suite, l'image de m/n ne peut être que $m_{\mathbb{K}}/n_{\mathbb{K}}$. □

Pour définir $\mathbb{R}$, on va avoir besoin de la notion de borne supérieure, définie de la manière suivante :

Définition 1.1.4. *Soit E un ensemble ordonné, et soit A un sous-ensemble de E.*

- *un* majorant *(resp. un* minorant*) de A est un élément m de E tel que pour tout a de A, on ait $a \leq m$ (resp. $m \leq a$) ;*
- *un* plus grand élément *(resp.* un plus petit élément*) est un majorant (resp. un minorant) de A qui appartient à A ;*
- *une* borne supérieure *(resp. une* borne inférieure*) de A est un plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (resp. un plus grand élément de l'ensemble des minorants de A).*

Propriété 1.1.5. *Dans un ensemble ordonné E, si un sous-ensemble A de E admet un plus petit élément, celui-ci est unique. On le note alors* $\min A$. *Par ailleurs, la borne supérieure étant définie comme le plus petit élément d'un certain ensemble, celle-ci est également unique (si elle existe). On la note* $\sup A$.

Démonstration. Supposons qu'un ensemble A admette deux plus petits éléments x et y. Comme x est un plus petit élément de A et que $y \in A$, on a $x \leq y$. De même, $y \leq x$. On en conclut donc que $x = y$. □

La propriété suivante montre que bien qu'il soit possible que la borne supérieure d'un ensemble A ne soit pas dans A, il existe des éléments de A qui s'en approchent autant que l'on souhaite.

Propriété 1.1.6. *Soit E un ensemble ordonné et A un ensemble admettant une borne supérieure. Pour tout x de E avec $x < \sup A$, il existe y dans A tel que $x < y \leq \sup A$.*

Démonstration. Soit x un élément de E vérifiant $x < \sup A$. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, x n'est pas un majorant de A. Il existe donc $y \in A$ tel que $x < y$. De plus, comme $\sup A$ est un majorant de A, on a $y \leq \sup A$. □

Nous pouvons maintenant donner une définition axiomatique de $\mathbb{R}$. Plus précisément, nous allons définir $\mathbb{R}$ comme étant le seul corps vérifiant une certaine propriété. Il restera alors, pour que la définition ait un sens, à montrer qu'il existe effectivement un corps vérifiant cette propriété, et que ce corps est unique.

Théorème 1.1.7. *À (unique) isomorphisme près, il existe un unique corps ordonné dans lequel tout ensemble majoré admet une borne supérieure. Ce corps est noté $\mathbb{R}$, et est appelé corps des nombres réels.*

Dans le théorème 1.1.7 on entend par "isomorphisme" une bijection qui préserve les opérations $+$ et $\times$ ainsi que la relation $\leq$.

Le corps $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure. En effet, l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$ est majoré (par 2 par exemple), mais il n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$: on peut montrer que si q

était une telle borne supérieure rationnelle, on aurait $q^2 = 2$, or cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Nous allons montrer le théorème 1.1.7 dans les deux parties suivantes : nous allons montrer dans la partie 1.2 l'existence d'un corps ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure, puis, dans la partie 1.3, que deux tels corps sont isomorphes.

1.2 Une construction de $\mathbb{R}$

Dans cette partie, on va montrer qu'il existe un corps vérifiant les conditions du théorème 1.1.7 en définissant un ensemble que l'on munira d'une addition et d'une multiplication.

L'idée de cette construction est que l'ensemble $A_\alpha = \{q \in \mathbb{Q},\ q < \alpha\}$ caractérise entièrement le réel α. Comme pour l'instant on ne connaît que l'ensemble $\mathbb{Q}$, on va chercher à caractériser les ensembles de cette forme sans faire mention des réels. C'est ce qui est fait dans la définition suivante.

Définition 1.2.1. *On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ est une* coupure *(ou* coupure de Dedekind*) de $\mathbb{Q}$ si :*
- *il est différent de $\mathbb{Q}$ et $\emptyset$;*
- *pour tout élément q de A, on a $A_q = \{r \in \mathbb{Q},\ r < q\} \subset A$;*
- *pour tout q de A, il existe $r > q$ avec $r \in A$.*

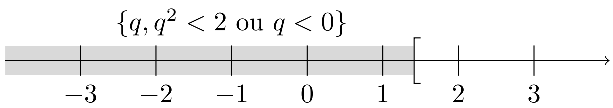

Figure 1.1 – La coupure de $\mathbb{Q}$ correspondant au réel $\sqrt{2}$.

L'existence d'un élément $r > q$ dans A permet d'éviter que les deux ensembles $\{q \in \mathbb{Q},\ q \leq q_0\}$ et $A_{q_0} = \{q \in \mathbb{Q},\ q < q_0\}$ ne soient tous les deux des coupures (seul le deuxième en est une).

Définition 1.2.2. *On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$.*

On notera que $\mathbb{Q}$ peut être vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{R}$ par l'identification $q \leftrightarrow \{r \in \mathbb{Q},\ r < q\}$. Toutefois, certaines coupures ne s'identifient à aucun rationnel, comme par exemple $\{q \in \mathbb{Q},\ q \leq 0 \text{ ou } q^2 < 2\}$, qui correspondra au réel $\sqrt{2}$. Cette dernière coupure est représentée sur la figure 1.1.

Il reste à définir sur $\mathcal{R}$ une structure de corps ordonné, puis à montrer que la propriété de la borne supérieure y est vérifiée.

Définition 1.2.3. *L'ensemble $\mathcal{R}$ est muni de la relation d'ordre $\subset$.*

On remarque que si A est une coupure, on a bien l'égalité $A = \{q \in \mathbb{Q}, A_q \subset A\}$: les coupures sont exactement les ensembles de la forme $\{q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\}$ pour un réel α.

Définition 1.2.4. *$\mathcal{R}$ est muni de la loi de composition interne $+$ définie par*

$$A + B = \{q \in \mathbb{Q},\ \exists a \in A,\ \exists b \in B,\ q = a + b\} = \bigcup_{b \in B} A + b.$$

On remarque qu'avec cette définition de l'addition, l'élément neutre est $\mathcal{O} = \{q \in \mathbb{Q},\ q < 0\}$ et l'opposé d'un élément A de $\mathcal{R}$ est donné par

$$-A = \{q \in \mathbb{Q},\ \exists r \in \mathbb{Q} \setminus A,\ q < -r\}.$$

Enfin, la définition de la multiplication est la suivante :

Définition 1.2.5. *Si $A \in \mathcal{R}$ et $B \in \mathcal{R}$ sont* positifs *(c'est-à-dire si $\mathcal{O} \subset A$ et $\mathcal{O} \subset B$), on pose :*

$$A \times B = \{q \in \mathbb{Q},\ \exists \alpha \in A,\ \exists \beta \in B,\ a > 0,\ b > 0,\ q < ab\}.$$

Pour A et B quelconques, on définit $A \times B$ grâce à la règle des signes pour se ramener à des coupures positives.

Propriété 1.2.6. *Muni de $+$, $\times$ et $\leq$, $\mathcal{R}$ est un corps ordonné dont l'élément neutre est $\{q \in \mathbb{Q},\ q < 0\}$ et l'élément unité $\{q \in \mathbb{Q},\ q < 1\}$.*

Démonstration. La démonstration, bien que sans réel obstacle, est longue et fastidieuse, et sera omise. □

Propriété 1.2.7. *$\mathcal{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure.*

Démonstration. Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble non-vide majoré de $\mathcal{R}$. On note $S = \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A$. On va montrer que S est la borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{X}$. Montrons tout d'abord que S est une coupure de $\mathbb{Q}$. Comme $\mathcal{X}$ est non-vide il contient un élément B (et B, qui est une coupure, est non-vide), et $B \subset \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A = S$, par conséquent S est non-vide. De plus $\mathcal{X}$ est majoré, donc il existe un élément M (qui, en tant que coupure, est différent de $\mathbb{Q}$) tel que tout élément B de $\mathcal{X}$ vérifie $B \subset M$. On a alors $S \subset M$ et S est donc différent de $\mathbb{Q}$. Soit x un élément de S. Comme $S = \bigcup_{A \in \mathcal{X}}$ il existe un A de $\mathcal{X}$ tel que $x \in A$. Comme A est une coupure, $\{y \in \mathbb{Q},\ y \leq x\} \subset A \subset S$ et il existe $z \in A \subset S$ avec $x < z$. L'ensemble S est donc bien une coupure.

Montrons maintenant que S est bien une borne supérieure de $\mathcal{X}$. Il faut pour cela montrer que S est un majorant de $\mathcal{X}$, puis que tout majorant de $\mathcal{X}$ est supérieur à S.

Soit B un élément de $\mathcal{X}$. On a $S = \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A$, donc $B \subset S$. S est donc bien un majorant de $\mathcal{X}$.

Soit maintenant M un majorant de $\mathcal{X}$. On a donc, pour tout B de $\mathcal{X}$, l'inclusion $B \subset M$. Par conséquent $S = \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A \subset M$. S est donc le plus petit des majorants de $\mathcal{X}$. □

Les propriétés 1.2.6 et 1.2.7 établissent l'existence énoncée dans le théorème 1.1.7.

1.3 Unicité du corps des réels

Dans cette partie, nous montrons que deux corps vérifiant les conditions du théorème 1.1.7 sont isomorphes. On va pour cela utiliser la définition suivante.

Définition 1.3.1. *Un corps ordonné $\mathbb{K}$ est dit* Archimédien *si quels que soient deux éléments x et y de $\mathbb{K}$ avec $0 < x$ et $0 < y$, il existe un entier positifi n tel que $x < ny$.*

On remarquera que $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné Archimédien. Le corps des réels est également Archimédien d'après la propriété suivante.

Propriété 1.3.2. *Un corps ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure est nécessairement Archimédien.*

Démonstration. On va raisonner par la contraposée, en montrant qu'un corps non-Archimédien ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure.

Par définition, dans un corps ordonné non-Archimédien, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $n\alpha < \beta$ pour tout n. Par conséquent, $n \leq \frac{\beta}{\alpha}$, ce qui fait que l'ensemble $\mathbb{N}$ est majoré.

Si ω est un majorant de $\mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \leq \omega$, d'où $n \leq \omega-1$. Par conséquent, $\omega-1$ est un majorant de $\mathbb{N}$, et $\mathbb{N}$ n'a donc pas de plus petit majorant, c'est-à-dire pas de borne supérieure. $\mathbb{N}$ étant une partie majorée n'admettant pas de borne supérieure, le corps considéré ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure. □

On savait déjà par la propriété 1.1.3 qu'un corps ordonné contenait (un sous-corps isomorphe à) $\mathbb{Q}$. On montre maintenant que le fait que $\mathbb{K}$ soit Archimédien revient à dire $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$.

Propriété 1.3.3. *Dans un corps ordonné $\mathbb{K}$ Archimédien, on peut encadrer tout élément x par des éléments de $\mathbb{Q}$ arbitrairement proches, au sens où pour tout entier m strictement positif, il existe un encadrement $\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$, avec n entier relatif.*

De plus, si $x < y$ sont deux éléments de $\mathbb{K}$ on peut trouver un élément q de $\mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.

Démonstration. Quitte à remplacer x par $-x$, on peut supposer que $x > 0$. Soit m un entier naturel. Comme $\mathbb{K}$ est Archimédien, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ x < \frac{k}{m}\}$ est non-vide. On note n son plus petit élément. On a donc $\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$.

Ensuite, si $x < y$, comme $\mathbb{K}$ est Archimédien, on peut trouver m tel que $m > \frac{1}{y-x}$, de sorte que $\frac{1}{m} < y - x$. Il existe alors, par la première partie de la proposition, un entier n tel que $\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$. On a alors, $\frac{n}{m} = \frac{n-1}{m} + \frac{1}{m} < x + (y - x) = y$. Le rationnel $\frac{n}{m}$ vérifie bien $x < \frac{n}{m} < y$. □

Nous allons maintenant faire la démonstration de l'"unicité" de $\mathbb{R}$. On va donc supposer que $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ sont deux corps satisfaisant les conditions du théorème 1.1.7 et nous allons construire un isomorphisme entre $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$. Par la propriété 1.1.3, $\mathbb{R}_1$ (resp. $\mathbb{R}_2$) contient un sous-corps $\mathbb{Q}_1$ (resp. $\mathbb{Q}_2$) isomorphe à $\mathbb{Q}$. En particulier, il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{Q}_1 \to \mathbb{Q}_2$. On définit l'application suivante de $\mathbb{R}_1$ dans $\mathbb{R}_2$:

$$\Phi(x) = \sup\{\varphi(q_1),\ q_1 \in \mathbb{Q}_1,\ q_1 < x\}.$$

Propriété 1.3.4. *Φ est une bijection de $\mathbb{R}_1$ dans $\mathbb{R}_2$, dont la réciproque est donnée par*

$$\Phi^{-1}(x) = \sup\{\varphi^{-1}(q_2),\ q_2 \in \mathbb{Q}_2,\ q_2 < x\}.$$

Φ est de plus un isomorphisme de corps ordonné.

Démonstration. Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}_1$. On peut supposer $x < y$. Par la propriété 1.3.3, il existe deux élément q et q' de $\mathbb{Q}_1$ tels que $x < q < q' < y$. Par définition de Φ, on a alors $\Phi(x) \leq \varphi(q) < \varphi(q') \leq \Phi(y)$. En particulier, $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$ sont distincts, et Φ est donc injective.

Définissons une fonction de $\mathbb{R}_2$ dans $\mathbb{R}_1$ par $\Psi(x) = \sup\{\varphi^{-1}(q_2),\ q_2 \in \mathbb{Q}_2,\ q_2 < x_2\}$. Remarquons ensuite qu'on a l'égalité, pour $x \in \mathbb{R}_2$,

$$\{q_1 \in \mathbb{Q}_1,\ q_1 < \Psi(x)\} = \{\varphi^{-1}(q_2),\ q_2 \in \mathbb{Q}_2,\ q_2 < x\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\Phi(\Psi(x)) = \sup\{\varphi(q_1),\ q_1 \in \mathbb{Q}_1,\ q_1 < \Psi(x)\} &= \sup\{\varphi(\varphi^{-1}(q_2)),\ q_2 \in \mathbb{Q}_2,\ q_2 < x\}\\ &= \sup\{q_2 \in \mathbb{Q}_2,\ q_2 < x\}\\ &= x,\end{aligned}$$

ce qui montre que l'expression de Φ est surjective, donc bijective, et que sa réciproque est Ψ. Il reste enfin à vérifier que Φ préserve la structure de corps ordonné. □

La propriété 1.3.4 énonce l'unicité du corps des réels, au sens où deux corps vérifiant les conditions du théorème 1.1.7 sont isomorphes. Dans la propriété suivante, on montre de plus qu'il n'y a qu'une seule manière de réaliser cet isomorphisme.

Propriété 1.3.5. *Si $\tilde{\Phi}$ est un isomorphisme de corps ordonnés de $\mathbb{R}_1$ dans $\mathbb{R}_2$, alors $\tilde{\Phi} = \Phi$.*

Démonstration. On sait déjà que $\tilde{\Phi}(q_1) = \Phi(q_1)$ pour tout q_1 dans $\mathbb{Q}_1$, puisque $\sup\{q \in \mathbb{Q}_1, q < q_1\} = q_1$.

Enfin, comme $\tilde{\Phi}$ préserve l'ordre, si $q_1 < x < q_1'$, alors on a $\varphi(q_1) = \tilde{\Phi}(q_1) < \tilde{\Phi}(x) < \tilde{\Phi}(q_1') = \varphi(q_1')$. Ces inégalités impliquent que $\tilde{\Phi}(x) = \sup\{\varphi(q_1),\ q_1 \in \mathbb{Q}_1,\ q_1 < x\}$. □

1.4 Approximation rationnelle d'un réel

1.4.1 Approximation décimale

La propriété 1.3.3 montre que pour tout réel x et tout entier naturel n on peut trouver un encadrement de la forme

$$\frac{k}{10^n} \leq x < \frac{k+1}{10^n}.$$

Les nombres $\frac{k}{10^n}$ et $\frac{k+1}{10^n}$ sont respectivement appelés des approximations décimales de x par défaut et par excès.

Par des divisions Euclidiennes succesives, on peut écrire $k = a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^q a_q$, de sorte que le rationnel $\frac{k}{10^n}$ peut être exprimé sous forme d'un développement décimal *fini* .

On verra plus loin (dans le chapitre sur les séries), comment tout réel s'exprime à l'aide d'un développement décimal, éventuellement infini.

1.4.2 Approximation rationnelle quadratique

On va ici préciser la propriété 1.3.3. En effet, étant donnés un réel x et un entier m, il existe un encadrement

$$\frac{n}{m} \leq x < \frac{n+1}{m}. \tag{1.1}$$

Une majoration de l'erreur dans cette approximation est alors donnée par $|x - \frac{n}{m}| \leq \frac{1}{m}$. On va montrer que si m est bien choisi, on peut avoir une approximation bien plus précise.

Propriété 1.4.1. *Soit x un nombre réel et soit N un entier naturel. Il existe n et m deux entiers avec $n \leq N$ et $m \leq N$ tels que*

$$\left|\frac{n}{m} - x\right| \leq \frac{1}{mN}. \tag{1.2}$$

On peut remarquer que $\frac{1}{mN}$ est inférieur à $\frac{1}{m^2}$ qui est très inférieur à $\frac{1}{m}$, de sorte que l'approximation (1.2) est bien meilleure que l'approximation (1.1).

Démonstration. Pour tout $m \in \{0, \ldots, N\}$, il existe un entier n_m tel que

$$n_m \leq mx < n_m + 1.$$

On considère alors l'ensemble

$$A = \{mx - n_m,\ m \in \{0, \ldots, N\}\} \subset [0, 1[.$$

L'ensemble A a $N+1$ éléments, donc si on écrit $[0,1]$ comme une union de de N intervalles :

$$[0,1] = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right[,$$

il existe un entier k tel que $[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}[\cap A$ ait deux éléments (note 2) $px - n_p$ et $qx - n_q$, avec $p \neq q$. On a donc

$$|(q-p)x - (n_q - n_p)| \leq \frac{1}{N}.$$

On en déduit que

$$\left| x - \frac{n_q - n_p}{q - p} \right| \leq \frac{1}{(q-p)N}.$$

Il suffit de poser $n = n_q - n_p$ et $m = q - p$ pour conclure. □

1.5 Exercices

Exercice 1.1.
Soit x un réel tel que pour tout entier naturel n, on ait $|x| \leq \frac{1}{n}$. Montrer que $x = 0$.

Exercice 1.2.
Déterminer les bornes supérieures (resp. inférieures) des ensembles suivants si elles existent, et dire si ce sont des plus grands (resp. plus petits) éléments :

$$\left\{\frac{n+1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} \ ; \ \left\{\sqrt{\frac{2n^2}{(n+2)(n+1)}},\ n \in \mathbb{N}\right\} \ ; \ \left\{\frac{n}{nm+1},\ (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 1.3.
Soient A et B deux sous-ensembles non-vides de $\mathbb{R}$ satisfaisant la propriété :

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b.$$

Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

(note 2). On met $N+1$ objets dans N ensembles. Par conséquent, les $N+1$ objets ne peuvent pas tous se retrouver dans des ensembles distincts. Ce principe s'appelle le *principe des tiroirs*.

Exercice 1.4.
Soient A et B deux sous-ensembles non-vides bornés de $\mathbb{R}$. Montrer les relations :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A,\ \sup B)\ ;\ \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A,\ \sup B)\ ;\ A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B.$$

Exercice 1.5.
Soit A un sous-ensemble borné non-vide de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{x \in \mathbb{R},\ -x \in A\}$. Montrer que $\sup(-A) = -\inf A$ et $\inf(-A) = -\sup A$.

Exercice 1.6.
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Montrer la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \sup A - \varepsilon \leq x.$$

Exercice 1.7.
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que $\sup A \notin A$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap]\sup A - \varepsilon, \sup A[$ contient une infinité d'éléments.

Exercice 1.8.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions bornées de A dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g \quad \text{et} \quad \inf_A (f+g) \geq \inf_A f + \inf_A g,$$

où l'on a noté $\sup_A f = \sup\{f(x), x \in A\}$. Donner un cas où les inégalités ci-dessus sont strictes. On fera attention de vérifier que toutes les quantités écrites ont un sens. Pour $f, g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, on pose

$$d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

Pourquoi la quantité $d(f,g)$ est-elle bien définie ? Montrer que si f, g et h sont trois fonctions de $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, alors

$$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h).$$

Exercice 1.9.
On va chercher à classifier les sous-groupes de $\mathbb{R}$. On considère donc G un sous-groupe de $\mathbb{R}$, et on va différencier selon deux cas. On suppose que $G \neq \{0\}$.

1. Montrer que le réel $\alpha = \inf G \cap]0, \infty[$ est bien défini.
2. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. On suppose $\alpha = 0$. Montrer que pour tout réel x et tout réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble $G \cap [x, x+\varepsilon]$ est non vide. On dit que G est *dense* dans $\mathbb{R}$.
4. On s'intéresse à l'ensemble $G_\lambda = \{n + k\lambda,\ (n,k) \in \mathbb{Z}^2\}$. Que peut on dire de G_λ en fonction de λ, au vu des questions précédentes ?

Exercice 1.10.
Soit $f\ :\ [0,1] \to [0,1]$ croissante. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in [0,1],\ x \leq f(x)\}$ admet une borne supérieure α. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Définitions

Définition 2.1.1. *Une* suite réelle *est une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$.

On utilisera la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour désigner les suites de réels, où u_n est l'image de n par la suite.

Définition 2.1.2. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* croissante *si elle vérifie la proposition*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n.$$

Si l'inégalité est stricte, on dit que la suite est strictement croissante. *De même on définit une suite (strictement) décroissante. Une suite croissante ou décroissante est dite* monotone.

Définition 2.1.3. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* majorée *si elle vérifie*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M.$$

De même, on définit une suite minorée. *Un suite majorée et minorée est dite* bornée.

2.2 Convergence des suites

Définition 2.2.1. *On dit qu'une suite de réels* converge *vers un réel* l *si elle satisfait la proposition suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

Autrement dit, si on se fixe *a priori* un seuil d'erreur ε, il suffira d'aller assez loin dans la suite (au-delà de N) pour que tous les termes de la suite valent l, avec une erreur inférieure au seuil ε. Cette définition est illustrée sur la figure 2.1.

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Propriété 2.2.2. *Si une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un réel* l*, alors ce réel est unique, on l'appelle la* limite *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on le note* $l = \lim_n u_n$. *On utilisera également la notation* $u_n \to_n l$.

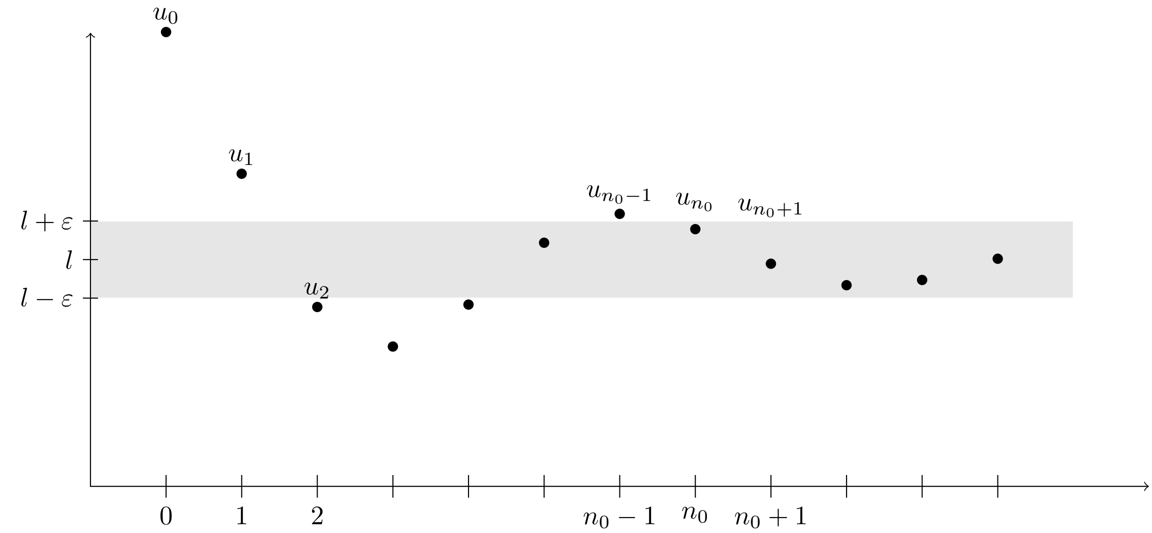

FIGURE 2.1 – Convergence d'une suite. À partir d'un certain rang n_0, tout les termes de la suite se trouvent dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ représenté par une bande grise.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, et soient deux réels l et l', avec $l < l'$. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l, et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l'. On pose $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$. Par définition de la convergence d'une suite, il existe un entier N tel que si $n \geq N$, on a $|u_n - l| < \varepsilon$. L'inégalité triangulaire donne alors que pour $n \geq N$,

$$2\varepsilon = l' - l \leq |u_n - l'| + |u_n - l| < \varepsilon + |u_n - l'|.$$

Autrement dit, $|u_n - l'| > \varepsilon$ pour n assez grand, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers l'. □

En revanche, certaines suites ne convergent vers aucun réel. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (note 1). On prendra donc garde à ne pas utiliser la quantité $\lim_n u_n$ *avant* d'avoir montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notamment, on se souviendra que la notation $u_n \to_n l$ signifie : "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut l".

Par exemple, si on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -u_n$, on pourrait être tenté de passer à la limite dans la relation de récurrence et obtenir $\lim_n u_n = -\lim_n u_n$, ce qui se résout en $\lim_n u_n = 0$. Or, ici on n'a pas vérifié que la suite admettait une limite. Effectivement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait donnée par $u_n = (-1)^n$, et n'admet donc pas de limite.

Propriété 2.2.3. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. Il suffit de récrire la définition. □

(note 1). Pour le voir : pour tout réel l, l'inégalité $|(-1)^n - l| \geq 1$ est vraie au moins pour tous les entiers pairs ou tous les entiers impairs, en fonction du signe de l. $|(-1)^n - l|$ ne peut donc pas être plus petit que $\varepsilon = 1/2$ à partir d'un certain rang.

L'opération de passage à la limite est linéaire :

Propriété 2.2.4. *Si deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent et si* λ *est un réel, alors* $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent et on a*

$$\lim_n (u_n+v_n) = \lim_n u_n + \lim_n v_n, \quad \lim_n \lambda u_n = \lambda \lim_n u_n.$$

Autrement dit, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_n u_n$ *est linéaire.*

Démonstration. — Pour la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - \lim_n u_n| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$. On a alors pour $n \geq N$,

$$\left|\lambda u_n - \lambda \lim_n u_n\right| \leq \varepsilon.$$

— Pour la somme de deux suites :
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait (note 2)

$$\left|u_n - \lim_n u_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left|v_n - \lim_n v_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors pour $n \geq N$

$$\left|(u_n+v_n) - (\lim_n u_n + \lim_n v_n)\right| \leq \left|u_n - \lim_n u_n\right| + \left|v_n - \lim_n v_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Propriété 2.2.5. *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers une limite l. Par définition de la convergence d'une suite (avec $\varepsilon = 1$), il existe un entier N tel que si $n \geq N$, alors

$$|u_n - l| \leq 1, \quad \text{ou encore} \quad l-1 \leq u_n \leq l+1.$$

On a donc, pour tout n, l'encadrement

$$\min(u_0, \ldots, u_N, l-1) \leq u_n \leq \max(u_0, \ldots, u_N, l+1).$$

□

La réciproque est bien entendu fausse, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée sans être convergente.

Propriété 2.2.6 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites telles que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers une même limite finie* l*. On suppose que pour tout* n*, on ait l'inégalité*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors $\lim_n v_n$ *existe et vaut* l*.*

(note 2). La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne un entier N_1 à partir duquel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à moins de $\varepsilon/2$ de sa limite. De même, on a un entier N_2 à partir duquel $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à moins de $\varepsilon/2$ de sa limite. On prend alors $N = \max(N_1, N_2)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un entier N tel si $n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$ et $|w_n - l| \leq \varepsilon$. Or, on a $u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l$, ce qui implique que $|v_n - l| \leq \max(|u_n - l|, |w_n - l|)$. Par conséquent, si $n \geq N$, on a $|v_n - l| \leq \max(|u_n - l|, |w_n - l|) \leq \varepsilon$. □

La convergence est aussi stable par produit :

Propriété 2.2.7. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes, alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et vérifie*

$$\lim_n u_n v_n = \left(\lim_n u_n\right)\left(\lim_n v_n\right).$$

De plus, si $\lim_n v_n \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, on a $v_n \neq 0$, de sorte que l'on peut parler de la convergence de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite converge et on a

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_n u_n}{\lim_n v_n}.$$

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Soit donc M tel que $|u_n| \leq M$. On écrit

$$\begin{aligned}
0 \leq \left|u_n v_n - \lim_n u_n \lim_n v_n\right| &\leq \left|u_n v_n - u_n \lim_n v_n\right| + \left|u_n \lim_n v_n - \lim_n u_n \lim_n v_n\right| \\
&= |u_n| \left|v_n - \lim_n v_n\right| + \left|u_n - \lim_n u_n\right| \left|\lim_n v_n\right| \\
&= M \left|v_n - \lim_n v_n\right| + \left|u_n - \lim_n u_n\right| \left|\lim_n v_n\right|.
\end{aligned}$$

Or, les deux suites $(|v_n - \lim_n v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|u_n - \lim_n u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0. Par le théorème des gendarmes, on a bien la convergence de $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers le produit des limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour la deuxième partie de la propriété, en prenant $\varepsilon = \frac{|\lim_n v_n|}{2} > 0$ dans la définition de la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on trouve un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait $|v_n - \lim_n v_n| \leq \frac{|\lim_n v_n|}{2}$, ce qui implique

$$|v_n| \geq \left|\lim_n v_n\right| - \left|v_n - \lim_n v_n\right| \geq \left|\lim_n v_n\right| - \frac{|\lim_n v_n|}{2} = \frac{|\lim_n v_n|}{2}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend donc bien des valeurs non-nulles pour $n \geq N$. Il suffit maintenant de montrer que $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\lim_n v_n}$. Remarquons que

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\lim_n v_n} = \frac{\lim_n v_n - v_n}{v_n \lim_n v_n}.$$

On a vu précédemment qu'il existe un entier N pour lequel, si $n \geq N$, on a $|v_n| \geq \frac{|\lim_n v_n|}{2}$. On a donc, pour $n \geq N$

$$0 \leq \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\lim_n v_n}\right| = \frac{|\lim_n v_n - v_n|}{|v_n \lim_n v_n|} \leq 2\frac{|\lim_n v_n - v_n|}{|\lim_n v_n|^2}.$$

Le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 ; le théorème des gendarme montre alors que $(1/v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/\lim_n v_n$. □

Définition 2.2.8. *On dit qu'une suite réelle* diverge vers ∞ *si elle vérifie la proposition*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq M.$$

On notera alors $\lim_n u_n = \infty$ *ou* $u_n \to_n \infty$*. De même, on dit qu'une suite réelle* diverge vers $-\infty$ *si elle vérifie la proposition*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq M.$$

On utilisera alors la notation $\lim_n u_n = -\infty$ *ou* $u_n \to_n -\infty$*.*

En réalité, certaines propriétés des suites convergentes se généralisent aux suites divergentes vers ∞ ou $-\infty$. Notamment, les propriétés 2.2.4 et 2.2.7 restent vraies pour des suites qui divergent vers $\pm\infty$, si l'on suit les règles d'addition et de multiplication pour les infinis (avec $x \in \mathbb{R}$) :

$$\infty + x = \infty \quad ; \quad \infty + \infty = \infty \quad ; \quad \infty \times \infty = \infty \quad ; \quad \frac{x}{\infty} = 0.$$

On peut également ajouter les règles

$$x \times \infty = \text{signe}(x)\infty \quad ; \quad \frac{x}{0^+} = \text{signe}(x)\infty,$$

où x est dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et où 0^+ désigne la limite d'une suite convergeant vers 0 par valeurs positives. On fera en revanche attention aux formes indéterminées

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Par conséquent, on s'autorisera également à dire qu'une suite "converge vers ∞" (ou vers $-\infty$). Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (vers un réel) ou diverge vers $\pm\infty$, on dira que la $\lim_n u_n$ *existe dans* $[-\infty, \infty]$. Pour éviter les confusions, on précisera à chaque fois si la suite converge *vers un réel fini* ou converge *dans* $[-\infty, \infty]$.

Propriété 2.2.9. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites vérifiant pour tout* n *l'inégalité* $u_n \leq v_n$ *et supposons que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* ∞*. Alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* ∞*.*

De même si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$*, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$*.*

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers ∞, l'autre cas étant totalement similaire. Soit M un réel. Par définition, il existe N tel que si $n \geq N$, on a $M \leq u_n \leq v_n$, ce qui achève la preuve. $\square$

On a une propriété de préservation de l'ordre par passage à la limite.

Propriété 2.2.10. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. On suppose que* $\lim_n u_n$ *et* $\lim_n v_n$ *existent dans* $[-\infty, \infty]$*. Si pour tout entier* n *on a l'inégalité* $u_n \leq v_n$*, alors les limites vérifient*

$$\lim_n u_n \leq \lim_n v_n.$$

Démonstration. On ne traite que le cas où les limites sont finies, les cas où au moins une des limite est infinie se traitant de manière similaire. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes telles que

$$\lim_n u_n > \lim_n v_n.$$

On va exhiber un entier N tel que $u_N > v_N$, ce qui achèvera la preuve. Soit $\varepsilon = \frac{\lim_n u_n - \lim_n v_n}{2}$. Il existe un entier N tel que la proposition suivante soit vérifiée :

$$\forall m \geq N, \ |u_m - \lim_n u_n| < \varepsilon \ \texttt{et} \ |v_m - \lim_n v_n| < \varepsilon.$$

On en déduit alors, par l'inégalité triangulaire,

$$v_N < \lim v_n + \varepsilon = \frac{\lim_n u_n + \lim_n v_n}{2} = \lim_n u_n - \varepsilon < u_N,$$

ce qui montre que $v_{n_0} < u_{n_0}$. □

Il est important de remarquer que l'inégalité $u_n < v_n$ ne donne pas une inégalité stricte à la limite : par exemple, on a $0 < \frac{1}{n}$, mais $\lim_n 0 = 0 = \lim_n \frac{1}{n}$.

2.3 Quelques critères de convergence

2.3.1 Suites monotones

Propriété 2.3.1. *Une suite croissante et majorée est convergente (vers une limite finie). De même, une suite décroissante et minorée converge.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. On va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sup_n u_n$ (qui et bien défini et appartient à $\mathbb{R}$, la suite étant majorée).

Soit ε un réel positif. Par définition de la borne supérieure, il existe un entier N tel que $u_N \geq \sup_n u_n - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a donc, pour tout $n \geq N$, l'inégalité

$$\sup_n u_n - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \sup_n u_n.$$

Par conséquent, on a pour tout $n \geq N$, $|u_n - \sup_n u_n| \leq \varepsilon$. Ce qui achève la preuve. □

La propriété 2.3.1 dit en substance qu'une suite croissante ne peut avoir que deux comportement : ou bien elle est bornée, auquel cas elle converge vers un réel fini, ou bien elle n'est pas bornée, auquel cas elle tend vers ∞. Cette propriété peut sembler évidente à première vue, mais elle repose en fait fortement sur la *complétude* de $\mathbb{R}$. Notamment, pour exhiber une limite à la suite, on a dû utiliser la propriété de la borne supérieure. La propriété 2.3.1 n'est notamment pas vraie dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, la suite

$$3\ ;\ 3.1\ ;\ 3.14\ ;\ 3.141\ ;\ 3.1415\ ;\ 3.14159\ ;\ 3.141592\ ;\ ..., \tag{2.1}$$

où l'on rajoute à chaque itération une décimale de π est bien croissante mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, puisque sa limite vaut π, qui n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

2.3.2 Suites adjacentes

La définition suivante permet de donner un critère efficace de convergence des suites.

Définition 2.3.2. *On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont* adjacentes *si elles vérifient les propriétés suivantes :*
- *Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante ;*
- *on a la convergence $v_n - u_n \to_n 0$.*

On peut remarquer que deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient nécéssairement $u_n \leq v_n$, pour tout entier n. En effet, la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et convergeant vers 0, elle est à termes positifs ou nuls.

La notion de suites adjacentes tire son intérêt du théorème suivant.

Théorème 2.3.3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent (dans $\mathbb{R}$) et leur limites sont égales. De plus on a, pour tout n entier, l'inégalité*

$$u_n \leq \lim_n u_n = \lim_n v_n \leq v_n.$$

Démonstration. Par définition de suites adjacentes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0), et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par u_0). Par la propriété 2.3.1, ces suites sont donc convergentes vers des limites finies. De plus, on a

$$\lim_n u_n - \lim_n v_n = \lim_n u_n - v_n = 0,$$

les limites sont donc égales. □

Une autre forme de ce théorème est la suivante.

Propriété 2.3.4 (Théorème des segments emboîtés)**.** *Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de segments de $\mathbb{R}$ qui est décroissante, au sens où*

$$I_{n+1} \subset I_n$$

et si la taille des I_n tend vers 0 au sens où

$$|\sup I_n - \inf I_n| \to 0.$$

Alors, l'ensemble $\bigcap_n I_n$ contient un unique élément.

Démonstration. Il suffit de remarquer que les suite $(\inf I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sup I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes qui convergent donc vers une limite commune l. On montre alors que $\bigcap_n I_n = \{l\}$. En effet $\inf I_n \leq l \leq \sup I_n$ pour tout n puisque les suites sont adjacentes, donc $l \in \bigcap_n I_n$. De plus, si $x \neq l$, disons pour fixer les idées $l < x$, alors $\sup I_n < x$ à partir d'un certain rang n_0 et donc $x \notin I_{n_0}$. □

2.3.3 Suites de Cauchy

Un critère puissant et général pour caractériser les suites convergentes est le suivant.

Définition 2.3.5. *On dit qu'une suite de réels est* de Cauchy *si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ (n \geq N \text{ et } m \geq N) \Rightarrow (|u_n - u_m| \leq \varepsilon).$$

Cette proposition peut se comprendre comme

$$\lim_{m,n \to \infty} |u_n - u_m| = 0.$$

La propriété importante des suites de Cauchy est la suivante :

Propriété 2.3.6. *Une suite réelle converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de Cauchy.*

Le fait qu'une suite convergente soit de Cauchy est un fait général, mais la réciproque est directement liée à la propriété de la borne supérieure. Par exemple la suite définie en (2.1) est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (sa limite est dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Pour démontrer la propriété 2.3.6, on va donc devoir utiliser une propriété vérifiée par $\mathbb{R}$ mais pas par $\mathbb{Q}$, par exemple la propriété 2.3.1.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente (vers une limite $l \in \mathbb{R}$) et soit ε un réel positif. Il existe un entier N tel que si $n \geq N$, $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n, m \geq N$, on a

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| \leq \varepsilon.$$

La suite est donc bien de Cauchy.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy. On remarquera, en prenant par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition d'une suite de Cauchy, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. La propriété de la borne supérieure permet donc de définir $l_n = \sup_{k\geq n} u_k$, qui est également une suite bornée (car $l_n \in [\inf_n u_n, \sup_n u_n]$). La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de plus décroissante (en effet $\{u_k,\ k \geq n+1\} \subset \{u_k,\ k \geq n\}$, de sorte que $\inf_{k\geq n+1} u_k \leq \inf_{k\geq n} u_k$). Elle est donc convergente vers une limite l, par la propriété 2.3.1. Montrons mantenant que l est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ et $m \geq N$, on a $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$. On a donc

$$u_n - \varepsilon \leq u_m \leq u_n + \varepsilon.$$

Soit $k \geq N$. En prenant la borne supérieure sur $m \geq k$, on trouve

$$u_n - \varepsilon \leq l_k \leq u_n + \varepsilon,$$

et en prenant la limite en $k \to \infty$, on obtient

$$u_n - \varepsilon \leq l \leq u_n + \varepsilon.$$

On a donc montré $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. □

On remarquera qu'on a effectivement eu besoin d'utiliser la complétude de $\mathbb{R}$ pour montrer que les suites de Cauchy convergent, à travers la propriété 2.3.1.

2.3.4 Valeurs d'adhérences, limites inférieures et supérieures

En fait, dans la preuve de la propriété 2.3.6, on a utilisé sans en parler la notion suivante.

Définition 2.3.7. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On appelle* limite supérieure *de la suite la quantité (appartenant à* $[-\infty, \infty]$*) définie par*(note 3)

$$\limsup_n u_n = \lim_N \sup_{n\geq N} u_n = \inf_N \sup_{n\geq N} u_n.$$

De même, on appelle limite inférieure *la quantité (appartenant à* $[-\infty, \infty]$*) définie par*

$$\liminf_n u_n = \lim_N \inf_{n\geq N} u_n = \sup_N \inf_{n\geq N} u_n.$$

On a toujours l'inégalité

$$\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n.$$

Cette définition est illustrée sur la figure 2.2.

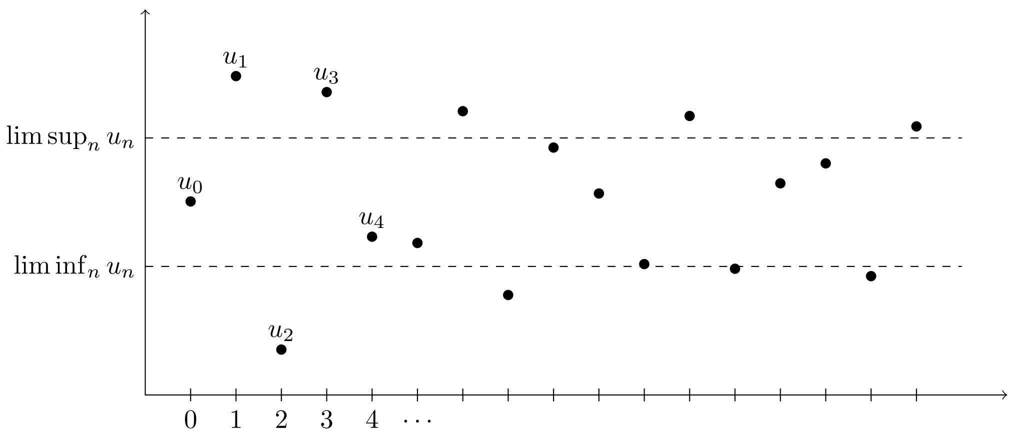

FIGURE 2.2 – Limites supérieure et inférieure d'une suite.

Démonstration de l'inégalité. On a $\inf_{k\geq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k\geq n} u_k$. On conclut en passant à la limite que $\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n$. □

L'intérêt de cette notion est que *toute* suite réelle admet une limite supérieure et une limite inférieure (éventuellement infinies). On peut donc toujours passer à la limite inférieure ou supérieure, sans avoir à tout d'abord vérifier une quelconque convergence, contrairement aux limites classiques.

Le lien entre la notion de limite supérieure/inférieure et la notion de limite est donné par la propriété suivante.

(note 3). Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sup_{n\geq N} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle converge vers sa borne inférieure, quitte à considérer une borne inférieure infinie : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle converge vers sa borne inférieure par la propriété 2.3.1, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, elle tend vers $-\infty$ (puisqu'elle est décroissante), qui est bien sa borne inférieure.

Propriété 2.3.8. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement* $\limsup_n u_n$ *et* $\liminf_n u_n$ *sont égales. Dans ce cas, sa limite est alors donnée par*

$$\lim_n u_n = \liminf_n u_n = \limsup_n u_n.$$

Démonstration. On ne fait que la preuve dans le cas où les limites sont finies. Le cas des limites infinies est similaire.

Supposons que $\limsup_n u_n = \limsup_n v_n = l$, et soit ε un réel strictement positif. Comme les suite $(\inf_{n\geq N} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(\sup_{n\geq N} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ convergent vers l respectivement en croissant et en décroissant, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait

$$l \leq \sup_{n\geq N} u_n \leq l+\varepsilon \quad \text{et} \quad l-\varepsilon \leq \inf_{n\geq N} u_n \leq l.$$

On a alors, pour $n \geq N$,

$$l-\varepsilon \leq \inf_{n\geq N} u_n \leq u_n \leq \sup_{n\geq N} u_n \leq l+\varepsilon,$$

et $|u_n - l| \leq \varepsilon$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers l.

Inversement, si u_n converge, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier N tel que $|u_n - \lim_n u_n| \leq \varepsilon$. Par conséquent, $u_n \in [\lim_n u_n - \varepsilon, \lim_n u_n + \varepsilon]$. En passant à la borne inférieure, on trouve, pour $n \geq N$

$$\inf_{k\geq n} u_k \in [\lim_n u_n - \varepsilon, \lim_n u_n + \varepsilon] \quad \text{d'où} \quad \liminf_n u_n \in [\lim_n u_n - \varepsilon, \lim_n u_n + \varepsilon]$$

et de même pour la limite supérieure. Cette inclusion étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\limsup_n u_n = \liminf_n u_n = \lim_n u_n$. □

Définition 2.3.9. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On appelle* sous-suite, *ou* suite extraite *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de la forme* $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, où* φ *est une fonction strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*.*

Remarquer que si l'on considère la sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et que l'on en extrait à nouveau une sous-suite, le résultat est de la forme $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par exemple, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, $\left(u_{2(2n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, mais pas de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.3.10. *On dit que* $l \in [-\infty, \infty]$ *est une* valeur d'adhérence *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si il existe une sous-suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* l*. Par extension, on dit que* ∞ *(ou* $-\infty$*) est valeur d'adhérence si il existe une sous-suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui diverge vers* ∞ *(ou* $-\infty$*).*

On peut redéfinir les notions de limites supérieures et inférieures à partir de la notion de sous-suites.

Propriété 2.3.11. *La limite supérieure (*resp. *inférieure) d'une suite est la plus grande (*resp. *petite) de ses valeurs d'adhérence.*

Démonstration. Soit $\lambda \in [-\infty, \infty]$ une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers λ. Or, on a

$$\inf_{k\geq\varphi(n)} u_k \leq u_{\varphi(n)} \leq \sup_{k\geq\varphi(n)} u_k.$$

En passant à la limite $n \to \infty$, on trouve

$$\liminf_n u_n \leq \lambda \leq \limsup_n u_n.$$

Par conséquent, $\limsup_n u_n$ est plus grand que toute valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour montrer que la limite supérieure est la plus grande valeur d'adhérence, il ne reste plus qu'à montrer que c'est effectivement une valeur d'adhérence. Pour cela on construit par récurrence une sous-suite qui converge vers la limite supérieure. On pose $\varphi(0) = 0$. Soit n un entier. On suppose φ défini jusqu'au rang n. On pose alors

$$\varphi(n+1) = \min A_n, \quad \text{avec} \quad A_n = \left\{ k \in \mathbb{N},\ k > \varphi(n) \texttt{ et } u_k \geq \left(\sup_{q > \varphi(n)} u_q - \frac{1}{n+1} \right) \right\}.$$

Par la propriété 1.1.6, l'ensemble A_n est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$. Par conséquent, il admet un plus petit élément, et la définition de φ a bien un sens, et par définition, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. La fonction φ définit donc bien une sous-suite. On a alors, pour $n \geq 1$,

$$\sup_{q > \varphi(n-1)} u_q - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq \sup_{q > \varphi(n-1)} u_q.$$

En appliquant le théorème des gendarmes, on trouve que $u_{\varphi(n)} \to \limsup_n u_n$. Une construction symétrique convient pour la limite inférieure. $\square$

On en déduit le résultat suivant.

Propriété 2.3.12. *Une suite converge (dans $[-\infty, \infty]$) si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est une valeur d'adhérence. Pour l'unicité, on remarque que d'après la propriété 2.3.11, les valeurs d'adhérence λ de la suite vérifient $\liminf_n u_n \leq \lambda \leq \limsup u_n$. Or, par la propriété 2.3.8 les limites inférieures et supérieures sont égales.

Inversement, si il y a une unique valeur d'adhérence λ, alors λ est à la fois la plus petite et la plus grande valeur d'adhérence, d'où $\lambda = \liminf_n u_n = \limsup_n u_n$, et la suite converge. $\square$

Théorème 2.3.13 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente (vers un réel fini).*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée : pour tout n, on a $-M \leq u_n \leq M$ pour un certain réel M. Par conséquent, $-M \leq \limsup_n u_n \leq M$, et la limite supérieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un réel fini. Par la propriété 2.3.11 ; il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\limsup_n u_n$, ce qui montre le résultat. $\square$

2.4 Relations de comparaison

2.4.1 Définitions, notations

On utilise les notations suivantes pour comparer les croissances de deux suites.

Définition 2.4.1 (Notations de Landau)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

— *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* négligeable *devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n = o(v_n)$ (ou parfois $u_n \ll v_n$) si on peut écrire*
$$u_n = \varepsilon_n v_n, \quad \textit{avec} \;\; \varepsilon_n \to_n 0.$$
Si $v_n \neq 0$, cette définition revient à
$$\frac{u_n}{v_n} \to 0\ ;$$
— *on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* dominée *par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si il existe $M > 0$ tel que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M|v_n|.$$
Si $v_n \neq 0$, cette définition revient à
$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est bornée}\ ;$$
— *on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* équivalente *à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n \sim v_n$ si*
$$u_n - v_n = o(v_n)$$
Si $v_n \neq 0$, cette définition revient à
$$\frac{u_n}{v_n} \to 1.$$

On remarquera que les notations $u_n = o(1)$, $u_n = \mathcal{O}(1)$ et $u_n \sim \lambda$ (pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) signifient respectivement "$u_n \to 0$", "u_n est bornée" et "$u_n \to \lambda$". Si de plus on a $u_n \geq 0$, alors $1 = o(u_n)$ signifie "$u_n \to \infty$",

On utilisera souvent l'écriture très commode $u_n = v_n + o(w_n)$ pour signifier $u_n - v_n = o(w_n)$ (et de même pour les $\mathcal{O}$). Avec ces notations, on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$ (ou encore $u_n = v_n + o(u_n)$)

On fera attention au fait que la relation notée $u_n = o(v_n)$ est plus une relation d'appartenance qu'un relation d'égalité. En effet, $u_n = o(v_n)$ est à comprendre comme
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left\{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est négligeable devant } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}.$$
Autrement dit, $o(u_n)$ est plutôt l'*ensemble* des suites négligeables devant u_n, et $v_n = o(u_n)$ signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans cet ensemble. Notamment, la relation $o(1) = o(n)$ est vraie, alors que $o(n) = o(1)$ est fausse. En fait ces relations sont des *inclusions* : l'ensemble des suites négligeable devant 1 est inclus dans l'ensemble des suites négligeables devant n ($o(1) \subset o(n)$), mais la réciproque n'est pas vraie ($o(n) \not\subset o(1)$).

Plus précisément, le résultat suivant montre que les relations o, $\mathcal{O}$ "ressemblent" à des relations d'ordre, et que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Propriété 2.4.2. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites réelles. Alors :*
— *si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$, *alors* $u_n = o(w_n)$ *;*
— *si* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *et* $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, *alors* $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ *;*
— *si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n$, *alors* $u_n \sim w_n$ *;*
— *si* $u_n \sim v_n$ *alors* $v_n \sim u_n$.

Toutefois les relations o et $\mathcal{O}$ ne sont pas de vraies relations d'ordre, par exemple car on peut avoir $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ sans avoir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Toutes ces preuves étant très similaires, on ne fait que la première. On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$. Par définition, cela signifie qu'il existe deux suite tendant vers 0, notées $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = \varepsilon_n v_n$ et $v_n = \eta_n w_n$. On peut donc écrire, $u_n = \varepsilon_n v_n = \varepsilon_n \eta_n w_n$. La suite $(\varepsilon_n\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend bien vers 0, ce qui montre que $u_n = o(w_n)$. □

On peut effectuer les opérations suivantes sur les relations de comparaison.

Propriété 2.4.3. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *des suites réelles et* λ *un réel.*
— *Si* $u_n = o(v_n)$, *alors* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *;*
— *si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$, *alors* $u_n + v_n = o(w_n)$ *et* $\lambda u_n = o(u_n)$ *;*
— *si* $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ *et* $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, *alors* $u_n + v_n = \mathcal{O}(w_n)$ *;*
— $\lambda u_n = \mathcal{O}(u_n)$ *;*
— *on suppose que* $u_n \sim \tilde{u}_n$ *et* $v_n \sim \tilde{v}_n$. *Alors* $u_n v_n \sim \tilde{u}_n\tilde{v}_n$.

En toute généralité, on ne peut pas sommer des équivalents (note 4), la notion d'équivalence étant plutôt basée sur la multiplication. Par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) + (-1) = \frac{1}{n} \quad \text{n'est pas équivalent à} \quad 1 + (-1) = 0. \tag{2.2}$$

De manière générale, on rencontre très rarement la relation $u_n \sim 0$ qui signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Toutefois, si l'on connaît des équivalences $u_n \sim \tilde{u}_n$ et $v_n \sim \tilde{v}_n$, et que l'on veut dire quelque chose sur $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut écrire

$$u_n + v_n = (\tilde{u}_n + o(\tilde{u}_n)) + (\tilde{v}_n + o(\tilde{v}_n)) = \tilde{u}_n + \tilde{v}_n + o(\tilde{u}_n) + o(\tilde{v}_n).$$

La question qui se pose alors est de comparer les suites $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'exemple (2.2) devient alors

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) + (-1) = 1 + o(1) + (-1 + o(1)) = o(1).$$

(car $o(1) = o(-1)$).

On pourra aussi méditer sur un exemple comme $\frac{n+1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n}$, qui est vrai, mais $\frac{n+1}{n} \sim 1 + 666n^{-42}$ est tout aussi vrai (autrement dit, dans un équivalent, seul le "premier" terme compte).

(note 4). Toutefois, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites *positives*, avec $u_n \sim \tilde{u}_n$ et $v_n \sim \tilde{v}_n$, alors $u_n + v_n \sim \tilde{u}_n + \tilde{v}_n$.

2.4.2 Croissances comparées

Le théorème suivant permet de décrire les vitesses relatives de quelques suites courantes.

Théorème 2.4.4. *Soient $\alpha > 1$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ trois réels. On a*

$$\alpha^{-n} \ll n^{-\beta} \ll \ln^{-\gamma}(n) \ll 1 \ll \ln^{\gamma}(n) \ll n^{\beta} \ll \alpha^n.$$

Ce théorème est illustré sur la figure 2.3 sur quelques exemples de suites.

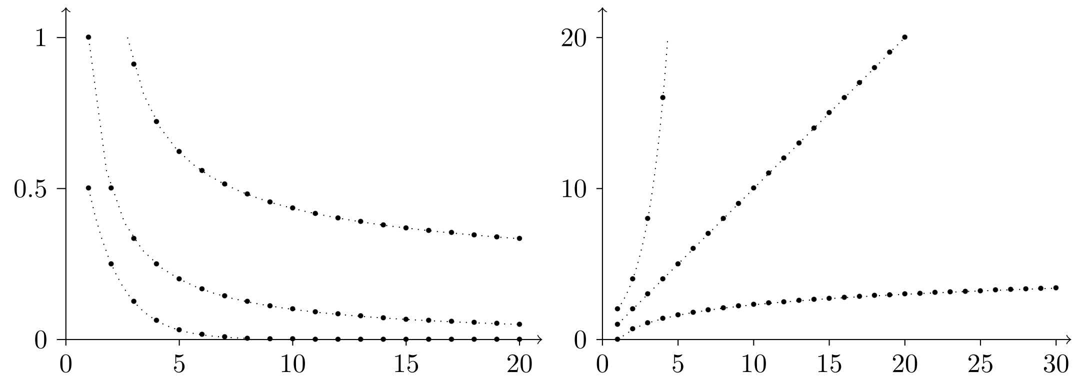

FIGURE 2.3 – Croissances comparées des suites. À gauche les suites 2^{-n}, n^{-1} et $\ln(n)^{-1}$. À droite les suites $\ln(n)$, n et 2^n.

Avant de commencer la preuve, on énonce un lemme préliminaire :

Lemme 2.4.5. *Si $\alpha > 1$, alors $\alpha^n \to \infty$. Notamment, si $0 < \alpha < \alpha'$, alors $\alpha^n = o(\alpha'^n)$.*

Démonstration. Comme $\alpha > 1$, la suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (avec $\alpha^0 = 1$). Par conséquent elle converge (dans $[1, \infty]$). On a alors

$$\lim_n \alpha^n = \lim_n \alpha^{n+1} = \lim_n \alpha\alpha^n = \alpha \lim_n \alpha^n.$$

Comme $\alpha > 1$, cette relation implique $\lim_n \alpha^n = \infty$. Si $0 < \alpha < \alpha'$, on voit que

$$\frac{\alpha'^n}{\alpha^n} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^n \to \infty, \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha^n}{\alpha'^n} \to 0$$

puisque $\frac{\alpha'}{\alpha} > 1$. On a donc bien $\alpha^n = o(\alpha'^n)$. □

Preuve du théorème. En vertu de la propriété 2.2.7, il suffit de montrer

$$1 \ll \ln^{\gamma}(n) \ll n^{\beta} \ll \alpha^n$$

pour $\alpha > 1$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$.

Pour $n \geq e^k$, on a $\ln(n) \geq k$. Comme k est arbitraire, $\ln(n)$ tend vers l'infini. En passant à puissance, on obtient la première relation $1 \ll \ln^\gamma(n)$.

La relation $n^\beta \ll \alpha^n$ se montre en remarquant que $\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta$ qui tend vers 1 (puisque $\frac{1}{n} \to 0$). Par conséquent, il existe un rang N tel que pour $n \geq N$, $\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta} \leq \frac{1+\alpha}{2} \in]1, \alpha[$. On a donc, pour $n \geq N$,

$$n^\beta = N^\beta \prod_{k=N}^{n-1} \frac{(k+1)^\beta}{k^\beta} \leq N^\beta \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{n-N} = 2^N N^\beta (1+\alpha)^{-N} \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n.$$

Le lemme 2.4.5 montre que $\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n = o(\alpha^n)$.

Pour la relation $\ln^\gamma(n) \ll n^\beta$, on considère k un entier naturel. Pour $n \in [e^{k-1}, e^k[$, on a $\ln(n) < k$ et $e^{(k-1)\beta} \leq n^\beta$. On a donc $\frac{\ln^\gamma(n)}{n^\beta} \leq e^\beta (e^\beta)^{-k} k^\gamma$. En faisant tendre k vers ∞, les relations déjà montrées donnent $(e^\beta)^{-k} k^\gamma \to 0$, ce qui achève la preuve. □

On en déduit les comparaison suivantes :

Corollaire 2.4.6. *Soient α, β et γ trois réels avec $\alpha > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ par*

$$u_n = \alpha^n n^\beta \ln^\gamma(n).$$

Si $\alpha < 1$, ou bien si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$, ou encore si $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\gamma < 0$ (note 5), alors la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0. En revanche, si $\alpha > 1$, ou bien si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, ou encore si $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\gamma > 0$ (note 6), alors la suite tend vers ∞.

Corollaire 2.4.7. *Soient (α, β, γ) et (a, b, c) des triplets de réels avec $\alpha > 0$ et $a > 0$. Si $\alpha < a$, ou bien si $\alpha = a$ et $\beta < b$, ou bien si $\alpha = a$, $\beta = b$ et $\gamma < c$ (note 7), alors on a*

$$\alpha^n n^\beta \ln^\gamma(n) \ll a^n n^b \ln^c(n).$$

2.5 Suites récurrentes

Définition 2.5.1. *On appelle suite récurrente (d'ordre 1) une suite réelle définie par une relation de récurrence de la forme*

$$u_0 \in I, \quad u_{n+1} = f(u_n), \tag{2.3}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans I.

Graphiquement, on peut tracer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du graphe de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$, comme sur la figure 2.4.

On a un critère simple pour prouver la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 2.5.2. *Si f est croissante, alors la suite définie par la relation de récurrence (2.3) est monotone.*

(note 5). Autrement dit, si $(\alpha, \beta, \gamma) < (1, 0, 0)$ pour l'ordre lexicographique. Cela revient à dire que l'on compare d'abord α avec 1, puis β avec 0, puis γ avec 0.

(note 6). Cela revient à $(\alpha, \beta, \gamma) > (1, 0, 0)$ pour l'ordre lexicographique. Noter que si $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$, on a affaire à la suite constante $u_n = 1$.

(note 7). Cela revient à $(\alpha, \beta, \gamma) < (a, b, c)$ pour l'ordre lexicographique.

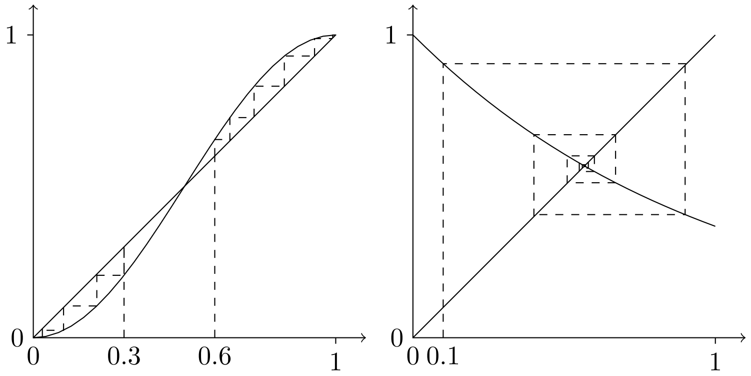

FIGURE 2.4 – À gauche, deux trajectoires de la suite $u_{n+1} = \frac{1-\cos(\pi u_n)}{2}$, avec les conditions initiales $u_0 = 0.3$ et $u_0 = 0.6$. À droite, la suite $u_{n+1} = e^{-u_n}$ partant de la condition initiale $u_0 = 0.1$.

Démonstration. Supposons $u_0 \leq u_1$. Nous allons montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet, on pose $\mathcal{P}(n) =$ "$u_n \leq u_{n+1}$". Par hypothèse, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On suppose donc $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. Par croissance de f, on obtient donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. On a donc montré $\mathcal{P}(n+1)$.

Le cas $u_0 \geq u_1$ se traite de la même manière. □

Ce résultat est illustré sur la figure 2.4, sur le graphique de gauche. En effet, la fonction $f : x \mapsto (1 - \cos(\pi x)/2$ est croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, et on voit que la trajectoire de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ partant de $u_0 = 0.3$ décroît alors que la trajectoire partant de $u_0 = 0.6$ croît.

Le cas f décroissante est un peu plus complexe.

Propriété 2.5.3. *Si f est décroissante, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.*

De plus si $u_0 \leq u_1$, alors $u_{2n} \leq u_{2n+1}$ pour tout n, alors que si $u_0 \geq u_1$, on a $u_{2n} \geq u_{2n+1}$ pour tout n.

Démonstration. On remarque que si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante (puisque si $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$ d'où $f(f(x)) \leq f(f(y))$). Mais les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent être définies par les relations de récurrence

$$u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(u_{2n+1}).$$

Par la propriété 2.5.2 appliquée à la fonction croissante $f \circ f$, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc monotones.

Enfin, si $u_0 \leq u_1$, on montre par récurrence que $u_{2n} \leq u_{2n+1}$ pour tout n en appliquant deux fois la fonction f (et de même si $u_0 \geq u_1$). □

Ce résultat est illusré sur le graphe de droite de la figure 2.4. En effet, fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante, et on voit que la suite $u_n = e^{-u_n}$ prend sucessivement ses valeurs de part et d'autre de la solution de l'équation $x = e^{-x}$ (correspondant à 0.567...).

Si l'on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a un moyen d'identifier les limites possibles.

Propriété 2.5.4. *Si la fonction f est* continue*, et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (2.3) converge vers une limite $l \in I$, alors $l = f(l)$* (note 8).

Démonstration. Il suffit de passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, en utilisant la continuité de f sur I. □

Théorème 2.5.5 (Théorème du point fixe de Picard)**.** *Si la fonction f vérifie la proposition*

$$\exists k < 1,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| < k|x - y|,$$

et si I est un intervalle fermé*, alors la fonction f a un unique point fixe vers lequel converge la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (2.3).*

Démonstration. Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, on montre par récurrence que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$. On en déduit que pour $N \leq p \leq q$, on a

$$\begin{aligned}
|u_p - u_p| &\leq |u_p - u_{p+1}| + |u_{p+1} - u_{p+2}| + \ldots + |u_{q-1} - u_q| \\
&\leq \sum_{n=p}^{q-1} k^n|u_1 - u_0| \\
&= \frac{k^p - k^{q-1}}{1-k}|u_1 - u_0| \\
&\leq \frac{k^N}{1-k}|u_1 - u_0| \\
&\to_N 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme l'intervalle I est fermé, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite l est dans I et vérifie

$$\begin{aligned}
|f(l) - l| &\leq |f(l) - f(u_n)| + |f(u_n) - u_n| + |u_n - l| \\
&\leq k|l - u_n| + |u_{n+1} - u_n| + |u_n - l| \\
&\to_n 0.
\end{aligned}$$

La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc un point fixe de f.

Enfin, si x et y sont deux points fixes de f, on a $|x-y| = |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$. Si $x \neq y$, on aurait donc $1 = \frac{|x-y|}{|x-y|} \leq k$, ce qui contredit l'hypothèse $k < 1$. La fonction f a donc un unique point fixe. □

2.6 Exercices

Exercice 2.1.
Montrer que de toute suite non majorée on peut extraire une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 2.2.
Montrer qu'une suite convergente à valeurs entières est stationnaire à partir d'un certain rang.

(note 8). On dit que l est un *point fixe* de f.

Exercice 2.3.
Étudier la convergence les suites de terme général

$$\frac{\sin(n^2)+n^2}{(1+n+e^{-\sqrt{n}})^3} \quad ; \quad \frac{(1+n)^4-(1-n)^4}{\sqrt{15+n^2+n^5}} \quad ; \quad \frac{n^2+n\ln^3(n)}{ne^{-\sqrt{n}}-n(2n+1)}$$

$$\frac{(n-\sin(n))(2n+1)}{\sqrt{n^4+e^{-n}}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{(n-1)(n+1)(n-2)}}{\ln(n)+2e^{-\frac{1}{n}}} - \frac{n\ln(n^2)+\sqrt{n}}{\sqrt{1+n^{-n}}}$$

Exercice 2.4.
Soient $x>0$ et α deux réels. Étudier le comportement asymptotique de la suite de terme général

$$\frac{E(nx)+E((n+1)x)+\ldots+E(2nx)}{n^\alpha},$$

en fonction de α.

Exercice 2.5.
Montrer que les suites définies par les relations de récurrence suivantes sont bien définies, et étudier leur comportement asymptotique.

$$u_0=1,\ u_{n+1}=\frac{\sin(u_n)}{2+u_n+2u_n^2} \quad ; \quad u_0=1,\ u_{n+1}=\sin\left(\frac{u_n}{2u_n+n}\right) \quad ; \quad u_0=1,\ u_{n+1}=u_n+\frac{u_n^2}{1+u_n^2}.$$

Exercice 2.6.
Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par une relation de récurrence affine de la forme

$$u_0\in\mathbb{R},\ u_{n+1}=au_n+b.$$

On pourra discuter selon la valeur de a.

Exercice 2.7.
Étudier la convergence des suites de terme général

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}},\quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^n k!.$$

Exercice 2.8.
Soit α un réel strictement plus grand que 1. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{(2n)^\alpha}+\frac{1}{(2n+1)^\alpha}\leq\frac{1}{2^{\alpha-1}n^\alpha}.$$

Montrer que la suite de terme général $v_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ vérifie :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n\leq v_{2n+1}\leq\frac{1}{2^{\alpha-1}}v_n+1,$$

et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2.9.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}.$$

sont adjacentes. En déduire une approximation de e à 10^{-2} près.

Exercice 2.10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Peut-on en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? Quelle hypothèse supplémentaire permettrait de conclure ?

Exercice 2.11.
Soit $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel (avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Montrer que les suites $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ∞.

Exercice 2.12.
[Lemme de Cesàro]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ est convergente et que

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_n u_n.$$

Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non convergente telle que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2.13.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation, dite de *sous-additivité*,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ u_{p+q} \leq u_p + u_q$$

1. Montrer que pour tous entiers n et p, on a

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{\max(u_0, \ldots, u_{p-1})}{n}$$

   (on pourra faire la division euclidienne de n par p).
2. En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\inf_n \frac{u_n}{n} \in [-\infty, \infty[$ (on pourra considérer un entier p bien choisi).
3. En déduire un résultat analogue pour les suites à valeurs dans $]0, \infty[$ vérifiant

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ u_{p+q} \leq u_p u_q.$$

Exercice 2.14.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_{n+1} - u_n \to_n 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

Chapitre 3

Séries numériques

3.1 Premières définitions

Une série (réelle ou complexe) est une suite dont les termes sont écrits sous la forme $\sum_{n=0}^{N} u_n$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (réelle ou complexe). La série $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ sera notée de manière plus consise $\sum u_n$. Dans cette écriture, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *terme général* de la série $\sum u_n$, et les sommes $\sum_{n=0}^{N} u_n$ sont appelées *sommes partielles* de la série $\sum u_n$. Remarquer que *toute* suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être mise sous forme de série, en utilisant l'écriture

$$v_N = \sum_{n=0}^{N} \left(v_n - v_{n-1}\right),$$

où l'on a posé par convention $v_{-1} = 0$.

Définition 3.1.1. *Si la suite* $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ *admet une limite, on dit que la série* $\sum u_n$ *est* convergente. *La limite de* $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ *est appelée* somme *de la série* $\sum u_n$ *et est* notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. *Pour une série convergente* $\sum u_n$*, les termes de la suite* $(\sum_{N=n}^{\infty} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n$$

sont appelés restes *de la série.*

Il faut être bien conscient du fait que la notation $\sum_{n=0}^{\infty}$ contient une *limite*, et est donc à manier avec précaution. Notamment, on prendra garde a ne pas écrire le reste d'une série, et a ne pas parler de la somme d'une série avant d'avoir vérifié la convergence !

Les propriétés sur les suites convergentes donnent la propriété suivante.

Propriété 3.1.2. *Une combinaison linéaire de deux séries convergentes est convergente, et on a l'identité, pour deux scalaires λ et μ,*

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n).$$

Autrement dit, l'ensemble des séries convergentes constitue un espace vectoriel, et l'application qui à une série associe sa limite est linéaire.

Propriété 3.1.3. *Les restes d'une série convergente tendent vers 0.*

Démonstration. Il suffit de passer à la limite dans l'égalité

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n,$$

le membre de droite étant convergent. □

Propriété 3.1.4. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*

Démonstration. En passant à la limite dans l'égalité

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n,$$

(licite car le membre de droite converge) on obtient

$$\lim_{N\to\infty} u_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0.$$

□

La réciproque de cette propriété est *fausse*, comme on peut le voir sur l'exemple $\sum \log(1+\frac{1}{n})$. En effet, le terme général de cette série tend vers 0, mais elle ne converge pas, ses sommes partielles étant données par

$$\sum_{k=1}^{N} \log(1+1/k) = \sum_{k=1}^{N} \log((k+1)/k) = \sum_{k=1}^{N} \log(k+1) - \sum_{k=1}^{N} \log(k) = \log(N+1) \to_N \infty.$$

On sait qu'une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy. Il est donc intéressant de caractériser les séries qui constituent des suites de Cauchy.

Propriété 3.1.5. *Une série $\sum u_n$ constitue une suite de Cauchy si et seulement les sommes $\sum_{n=p}^{q} u_n$ tendent vers 0 quand p et q tendent vers l'infini, c'est-à-dire qu'elle vérifient la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (N \le p \le q) \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^{q} u_n \right| \le \varepsilon.$$

Démonstration. C'est une simple réécriture de la définition d'une suite de Cauchy. En effet, on a l'égalité $\sum_{n=0}^{q} u_n - \sum_{n=0}^{p-1} u_n = \sum_{n=p}^{q} u_n$. □

La propriété 3.1.5 nous permet de montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En effet, on a

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N+1}{2N}.$$

Or $\frac{N+1}{2N}$ converge vers $1/2$. Les sommes partielles de la série harmonique ne constituent donc pas une suite de Cauchy : cette série diverge.

Définition 3.1.6. *Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est* absolument convergente.

La propriété suivante permet de réduire l'étude de la convergence de nombreuses séries à l'étude des séries à termes *positifs*.

Propriété 3.1.7. *Une série absolument convergente est convergente et vérifie l'inégalité*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \,.$$

Démonstration. Supposons que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Montrons que la série $\sum u_n$ constitue une suite de Cauchy.

Par l'inégalité triangulaire, on a, pour $p \leq q$,

$$\left|\sum_{n=p}^{q} u_n\right| \leq \sum_{n=p}^{q} |u_n|.$$

Comme la série $\sum |u_n|$ converge, ses sommes partielles constituent une suite de Cauchy et on a

$$\sum_{n=p}^{q} |u_n| \underset{p,q\to\infty}{\to} 0.$$

Comme $\left|\sum_{n=p}^{q} u_n\right| \leq \sum_{n=p}^{q} |u_n|$, les sommes partielles de $\sum u_n$ constituent aussi une suite de Cauchy et la série $\sum u_n$ converge.

Pour montrer l'inégalité, il suffit de remarquer que $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right|$ converge (note 1) vers $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n|$, et de passer à la limite dans l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n| \,.$$

$\square$

(note 1). En effet, l'inégalité $\big||v_n| - |l|\big| \leq |v_n - l|$ montre que si $v_n \to l$, alors $|v_n| \to |l|$

3.2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, on va donner des critères de convergence pour les séries à termes positifs. L'intérêt est que la propriété 3.1.7 permet d'en déduire des critères de convergence pour des suites de signe quelconques (ou à valeur complexes).

Propriété 3.2.1. *Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général est* positif. *Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. Dans ce cas on a alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Démonstration. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle converge alors si et seulement si elle est bornée, et dans ce cas sa limite est égale à sa borne supérieure. □

Propriété 3.2.2. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à terme général positif telles que $u_n \leq v_n$.*
- *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*
- *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*

Démonstration. Comme $u_n \leq v_n$, on a $\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$. Si $\sum v_n$ converge, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$

et les sommes partielles de $\sum u_n$ sont donc bornées. Par la propriété 3.2.1, cela montre que $\sum u_n$ converge. L'autre implication est la contraposée de la première. □

Passons maintenant à l'étude de certaines séries particulières.

La convergence de la série géométrique $\sum a^n$ se montre de manière très simple, et cette série va nous donner des critères de convergence pour d'autres séries :

Propriété 3.2.3. *Soit a un nombre complexe. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. On a alors dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

On peut remarquer que si $|a| < 1$, on n'a même pas $a^n \to 0$, et la série ne peut pas converger en vertu de la propriété 3.1.3.

Démonstration. Premièrement, on écarte le cas $a = 1$, pour lequel les sommes partielles valent $\sum_{n=0}^{N} 1 = N + 1$, la série étant alors divergente.

Dans le cas $a \neq 1$, on remarque que $(1-a)\sum_{n=0}^{N} a^n = \sum_{n=0}^{N} a^n - \sum_{n=1}^{N+1} a^n = 1 - a^{N+1}$. On a donc, en divisant par $1 - a$ (qui est non-nul),

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}.$$

La série converge donc si et seulement si a^{N+1} a une limite quand N tend vers l'infini, ce qui revient bien à $|a| < 1$. □

On remarque que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule (à multiplication par une constante près) à vérifier l'égalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a$. On peut en fait obtenir un critère de convergence proche de celui de la série géométrique pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge.

Théorème 3.2.4 (Critère de d'Alembert). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un réel l.*

— *si $l > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge ;*
— *si $l < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

Ce critère ne permet toutefois pas de conclure dans le cas $l = 1$ comme on peut le voir sur les exemples $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$. En effet, la première série diverge et la deuxième converge (note 2), alors que les rapports de termes consécutifs vérifient

$$\frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1, \quad \text{et} \quad \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1.$$

Démonstration. Plaçons nous d'abord dans le cas $l < 1$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l strictement inférieure à 1, si $l < 1 - \varepsilon < 1$ (note 3), alors il existe un certain rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \varepsilon$. On peut donc écrire

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{n=n_0}^{N-1} (1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{N-n_0}.$$

On a donc $u_N \leq \frac{u_{n_0}}{(1-\varepsilon)^{n_0}}(1-\varepsilon)^N$ dès que $N > n_0$. Comme la série $\sum(1-\varepsilon)^N$ converge, alors $\sum u_N$ converge aussi, puisque ces deux séries sont à termes positifs.

Le cas $l > 1$ se traite de manière similaire : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l strictement supérieure à 1, donc pour $1 < 1 + \varepsilon < l$ (note 4) il existe un rang n_0 tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 + \varepsilon$ si $n \geq n_0$. On écrit

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \prod_{n=n_0}^{N-1} (1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{N-n_0},$$

ce qui donne $u_N \geq \frac{u_{n_0}}{(1+\varepsilon)^{n_0}}(1+\varepsilon)^N$ dès que $N > n_0$. Comme la série $\sum(1+\varepsilon)^N$ diverge, $\sum u_N$ diverge aussi. □

En fait, on peut énonce un résultat un peu moins restrictif (il ne suppose pas que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait une limite) en utilisant la notion de limites inférieures et supérieures en lieu et place de limites, comme dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Si*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

(note 2). Voir propriété 3.2.10
(note 3). Un tel ε existe nécessairement, par exemple $\varepsilon = (1-l)/2$.
(note 4). Par exemple, $\varepsilon = (l-1)/2$.

alors la série $\sum u_n$ *converge. Si*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

alors la série diverge.

La preuve du théorème 3.2.5 se fait alors exactement comme celle du théorème 3.2.4, en utilisant la propriété suivante des limites supérieures (et inférieures) :

Propriété 3.2.6. *Si* $\limsup_{n\to\infty} u_n = l < \infty$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un rang* n_0 *tel que si* $n \geq n_0$ *on a* $u_n \leq l + \varepsilon$.
Si $\liminf_{n\to\infty} u_n = l > -\infty$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un rang* n_0 *tel que si* $n \geq n_0$ *on a* $u_n \geq l - \varepsilon$.

Démonstration. Posons $l = \limsup_n u_n$. On a $\limsup_n u_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} u_k < l+\varepsilon$, donc par définition de la borne inférieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{k\geq n_0} u_k < l + \varepsilon$, ce qui donne le résultat. □

On peut énoncer un autre critère de convergence basé sur le fait que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule suite à vérifier $(u_n)^{1/n} = a$. On peut en fait étendre le critère de convergence des séries géométriques aux séries dont le terme général u_n est tel que $\left(u_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Propriété 3.2.7 (Règle de Cauchy)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs telle que la suite* $\left(u_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite* l.
- *Si* $l < 1$, *alors la série converge ;*
- *Si* $l > 1$, *alors la série diverge.*

Démonstration.
- Si $l < 1$, pour un ε tel que $l < 1 - \varepsilon < 1$, il existe un rang n_0 tel que, si $n \geq n_0$, on a $u_n^{1/n} \leq 1 - \varepsilon$. On a donc, pour $n \geq n_0$, l'inégalité $u_n \leq (1-\varepsilon)^n$. Comme la série géométrique de raison $1 - \varepsilon$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.
- Si $l > 1$, alors il existe un rang n_0 tel que $u_n^{1/n} > 1$ dès que $n \geq n_0$. On a donc, pour $n \geq n_0$, $u_n \geq 1$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, et la série $\sum u_n$ est donc divergente.

□

On peut affaiblir les hypothèses de ce théorème en remplaçant la limite par une limite supérieure :

Propriété 3.2.8. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs.*
- *Si* $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} < 1$, *alors la série converge ;*
- *Si* $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} > 1$, *alors la série diverge.*

Démonstration. La preuve reste essentiellement la même, on doit juste remarquer que dans le cas où $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} > 1$, on a $u_n^{1/n} > 1$ pour une infinité de valeurs de n (plutôt que pour tout n assez grand). □

De même que pour la règle de d'Alembert, on ne peut pas conclure immédiatement dans le cas ou la limite supérieure vaut 1, comme on peut le voir sur les exemples des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Il existe des cas pour lesquels la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas celle de d'Alembert. Par exemple, si on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on remarque que

$$u_n^{1/n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{3} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{3^{n+1}}{2^n} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

On a donc $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1/2 < 1$, alors que $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Par conséquent, la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas celle de d'Alembert. La raison est que la règle de Cauchy considère les valeurs de chaque u_n dans l'absolu, alors que la règle de d'Alembert ne considère que les accroissements relatifs entre deux termes consécutifs, qui peuvent être grand alors que les termes de la séries sont petits.

On a en fait l'inégalité suivante, qui montre que la règle de Cauchy est plus fine que la règle de d'Alembert.

Propriété 3.2.9. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Alors on a*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \liminf_{n\to\infty} u_n^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Démonstration. Montrons $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. On pose $l = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, que l'on peut supposer fini (dans le cas contraire, il n'y a rien à montrer). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice n_0 tel que si $n \ge n_0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$. On a donc, pour $N \ge n_0$,

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \prod_{n=n_0}^{N-1} (l+\varepsilon) = (l+\varepsilon)^{N-n_0}.$$

On peut donc écrire,

$$u_N^{1/N} \le \left(\frac{u_{n_0}}{(l+\varepsilon)^{n_0}}\right)^{1/N} (l+\varepsilon).$$

En passant à la limite supérieure, on trouve

$$\limsup_{N\to\infty} u_N^{1/N} \le (l+\varepsilon).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\limsup_{N\to\infty} u_N^{1/N} \le l = \limsup_{N\to\infty} \frac{u_{N+1}}{u_N}$.

On a donc montré la troisième inégalité. La première se montre de la même manière, et la deuxième découle de la définition des limites inférieure et supérieure. □

On veut maintenant pouvoir déterminer le comportement asympotiques de séries pour lesquelles les règles de Cauchy et d'Alembert ne s'appliquent pas. L'exemple typique de telles séries étant les séries puissances (ou *séries de Riemann*) du type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. On a un critère très simple pour la convergence de ces séries.

Propriété 3.2.10. *La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. On sait que si $\alpha < \beta$, alors $\frac{1}{n^\beta} \le \frac{1}{n^\alpha}$. Par conséquent, il suffit de montrer la divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$, et la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dès que $\alpha > 1$.

La divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$ a déjà été traité, il reste donc a traiter le cas $\alpha > 1$. On écrit

$$\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{n^\alpha} \le \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{(2^N)^\alpha} = \frac{2^{N+1}-2^N}{(2^\alpha)^N} = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^N}.$$

On fixe un entier naturel n. Il existe un entier N tel que $n \le 2^{N+1}-1$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \le \sum_{k=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{q=0}^{N} \sum_{k=2^q}^{2^{q+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \le \sum_{q=0}^{N} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^q} \le \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^q} < \infty.$$

La dernière série converge car $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$. Les sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont donc bornées. Comme la série est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge. □

Pour avoir un nouveau critère de convergence des séries, nous allons essayer d'appliquer le critère de d'Alembert aux séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Remarquons que la suite $\frac{1}{n^\alpha}$ vérifie (note 5)

$$\begin{aligned}\frac{1/(n+1)^\alpha}{1/n^\alpha} = (1+1/n)^{-\alpha} &= e^{-\alpha \ln(1+1/n)} \\ &= e^{-\alpha(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \\ &= 1-\alpha\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

On va en déduire un critère de convergence pour toutes les séries dont le terme général admet un développement limité semblable.

Propriété 3.2.11 (Règle de Duhamel)**.** *Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le développement suivant en $n \to \infty$:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors :
- *si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge ;*
- *si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. On va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut, à partir d'un certain rang, être comparée à une suite de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$.

Supposons $1 < \alpha$. On choisit $1 < 1+\varepsilon < \alpha$. On a

$$\begin{aligned} n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}}\right) &= n\left(1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n\left(1-\frac{1+\varepsilon}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (1+\varepsilon-\alpha)+o(1).\end{aligned}$$

(note 5). On rappelle que si $u_n \to 0$, alors $\ln(1+u_n) = u_n + o(u_n) =$ et $e^{u_n} = 1+u_n+o(u_n)$.

Cela signifie que la suite de terme général $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}}\right)$ converge vers $1+\varepsilon-\alpha$, qui est strictement négatif. Par conséquent, cette suite est strictement négative à partir d'un certain rang n_0. On a donc

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} < \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}} = \frac{n_0^{1+\varepsilon}}{N^{1+\varepsilon}}.$$

À partir du rang n_0, on a donc $u_N \leq \frac{u_{n_0} n_0^{1+\varepsilon}}{N^{1+\varepsilon}}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ converge, alors $\sum u_n$ aussi.
La preuve pour le cas $\alpha < 1$ est similaire. □

Quand on sait comparer les termes généraux de deux séries, on peut en déduire des comparaisons entre les sommes partielles ou les restes des séries, d'après la propriété suivante.

Propriété 3.2.12. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites* positives*.*

- *Supposons que la série $\sum u_n$ diverge*
  - *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n \sim \sum_{n=0}^N v_n$*
  - *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n = o\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$;*
  - *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n = O\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$.*
- *Supposons que la série $\sum v_n$ converge.*
  - *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^\infty u_n \sim \sum_{n=N}^\infty v_n$*
  - *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^\infty u_n = o\left(\sum_{n=N}^\infty v_n\right)$;*
  - *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^\infty u_n = O\left(\sum_{n=N}^\infty v_n\right)$.*

Démonstration. On fait seulement la preuve pour le premier cas, les cinq autres étant semblables (ou plus simples). Comme $u_n \sim v_n$, pour tout $1 > \varepsilon > 0$ il existe un n_0 tel que si $n \geq n_0$, on a

$$(1-\varepsilon)v_n < u_n < (1+\varepsilon)v_n,$$

ce qui montre que $\sum v_n$ diverge, puisque $\sum u_n$ diverge.

Montrons maintenant l'équivalence des sommes partielles. On a

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1-\varepsilon)\sum_{n=n_0}^N v_n < \sum_{n=0}^N u_n < \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1+\varepsilon)\sum_{n=n_0}^N v_n.$$

On en déduit l'encadrement

$$\frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} + (1-\varepsilon)\frac{\sum_{n=n_0}^N v_n}{\sum_{n=0}^N v_n} < \frac{\sum_{n=0}^N u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} < \frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} + (1+\varepsilon)\frac{\sum_{n=n_0}^N v_n}{\sum_{n=0}^N v_n}.$$

Or, puisque la série $\sum v_n$ diverge, la suite $\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞, ce qui implique que $\frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^N v_n}$ tend vers 0 et $\frac{\sum_{n=n_0}^N v_n}{\sum_{n=0}^N v_n}$ vers 1. On en conclut

$$1-\varepsilon < \liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^N u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^N u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} < 1+\varepsilon.$$

Ces inégalités étant vraies pour tout ε, on en déduit que les limites supérieure et inférieure valent 1, de sorte que $\frac{\sum_{n=0}^N u_n}{\sum_{n=0}^N v_n}$ converge vers 1, et donc que $\sum_{n=0}^N u_n \sim \sum_{n=0}^N v_n$ □

Dans la propriété 3.2.12, il est important que les deux suites soient positives (ou au moins qu'elles soient de signe constant à partir d'un certain rang). En effet, on peut construire le contre-exemple suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \ v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

La série $\sum u_n$, étant alternée , converge (note 6), alors que la série $\sum v_n$ diverge à cause du terme $\frac{1}{n}$. Les deux suites sont pourtant équivalentes.

On énonce maintent le critère de comparaison séries/intégrales, qui permet de ramener l'étude de certaines séries à l'étude d'intégrales.

Théorème 3.2.13. *Soit* $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ *une fonction décroissante. Alors la série*

$$\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt \right)$$

converge.

Du théorème 3.2.13, on déduit que l'étude de la série $\sum f(n)$ peut se ramener à celle de la primitive de f :

Corollaire 3.2.14. *Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 3.2.13. Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur* $[0,\infty[$. *De plus,*

— *dans le cas où $\sum f(n)$ converge, on a*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \ ;$$

— *dans le cas où $\sum f(n)$ diverge, on a le développement asymptotique*

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^N f(t)dt + \sum_{n=0}^{\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt \right) + o(1). \tag{3.1}$$

Remarquer que dans le développement (3.1), le premier terme tend vers ∞, alors que le second est constant.

Ce corollaire est illustré sur la figure 3.1 : la valeur de l'intégrale $\int_0^n f(t)dt$ est encadrée par les quantités $\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ et $\sum_{k=1}^{n} f(k)$. L'énoncé du théorème 3.2.13 correspond au fait que l'aire grisée est finie.

Preuve du théorème 3.2.13. Comme la fonction f est décroissante, on peut écrire

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \text{ si } t \in [n, n+1],$$

d'où on déduit

$$0 \leq f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) - f(n+1).$$

(note 6). Voir la propriété 3.3.1 ci-dessous.

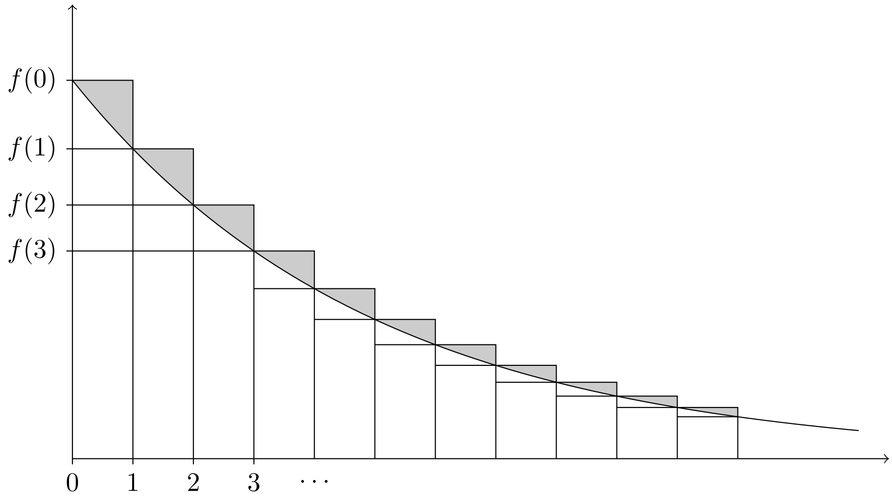

FIGURE 3.1 – Comparaison d'une série et d'une intégrale.

En sommant de $n = 0$ à $n = N$, on obtient les inégalités

$$0 \leq \sum_{n=0}^{N} \left(f(n) - \int_{n}^{n+1} f(t)dt \right) \leq \sum_{n=0}^{N} f(n) - f(n+1) = f(0) - f(N+1).$$

Comme la suite $f(n)$ est décroissante et minorée (par 0), elle converge vers une limite en ∞. On a donc

$$\sum_{n=0}^{N} \left(f(n) - \int_{n}^{n+1} f(t)dt \right) \leq f(0) - \lim_{N\to\infty} f(N).$$

La série $\sum \left(f(n) - \int_{n}^{n+1} f(t)dt \right)$ est donc une série à terme général positif dont les sommes partielles sont bornées. Il s'agit donc d'une série convergente. □

Preuve du corollaire 3.2.14. L'expression

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) - \int_{0}^{N+1} f(x)dx = \sum_{n=0}^{N} \left(f(n) - \int_{n}^{n+1} f(x)dx \right) \tag{3.2}$$

montre que la différence entre la suite des sommes partielles de $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (c'est le théorème 3.2.13). Cela montre donc que $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si $\int_0^n f(x)dx$ a une limite, c'est-à-dire si f est intégrable sur $[0, \infty[$.

Dans le cas où ces deux suites divergent, un passage à la limite dans (3.2) permet d'obtenir le développement (3.1). Dans le cas où elles convergent, l'encadrement énoncé s'obtient en sommant de N à ∞ les inégalités $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$. □

On peut par exemple déduire de l'équation (3.1) appliquée à la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{1+t}$ le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1),$$

où γ est une constante (dont les permières décimales sont 0.57721), appelée *constante d'Euler* (ou *d'Euler-Mascheroni*). On sait assez peu de chose sur γ, notamment on ignore encore à ce jour si elle est rationnelle ou non.

3.3 Séries à termes complexes

Propriété 3.3.1 (Critère des séries alternées)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et que deux termes consécutifs soient de signe opposés (une telle série est dit* alternée*). Alors la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, si $u_N \leq 0$, on a*

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{N+1} u_n.$$

On a donc une estimation de la vitesse de convergence :

$$|u_{N+1}| - |u_{N+2}| \leq \left| \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq |u_{N+1}|.$$

Démonstration. Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que u_n est du signe de $(-1)^n$.

Considérons les deux suites $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(w_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définies par

$$v_N = \sum_{N=0}^{2N+1} u_n \quad \text{et} \quad w_N = \sum_{n=0}^{2N} u_n.$$

On va montrer que ces deux suites sont adjacentes, de sorte qu'elles convergent vers la même limite, ce qui permettra de conclure que la série $\sum u_n$ converge.

Tout d'abord, on a $w_N = v_N - u_{2N+1} \geq v_N$, puisque les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'indices impairs ont été supposés négatifs. Ensuite, $v_{N+1} - v_N = u_{2N+2} + u_{2N+3} = (|u_{2N+2}| - |u_{2N+3}|) \leq 0$ (puisque la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît), de sorte que $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante. De même $(w_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Enfin on a $|v_N - w_N| = |u_{2N+1}|$ qui tend vers 0. On a bien affaire à des suites adjacentes. □

Exemple : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente quel que soit $\alpha > 0$. De plus, on remarque qu'elle n'est pas absolument convergente si $0 < \alpha \leq 1$.

On va montrer un résultat plus général que le théorème des séries alternées. On va tout d'abord montrer la propriété suivante, qui est un analogue discret de la formule d'intégration par parties.

Propriété 3.3.2 (Transformation d'Abel)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes. On pose*

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \textit{et} \quad v_n = V_{n+1} - V_n.$$

On a alors, pour tout entier $N \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n V_n = -\sum_{n=0}^{N-1} U_n v_n + U_N V_N.$$

Dans l'énoncé de la propriété 3.3.2, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une “primitive” de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (une somme est analogue à une intégrale) et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une “dérivée” de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (une différence est analogue à une dérivation)

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n V_n = \sum_{n=1}^{N} (U_n - U_{n-1}) V_n + U_0 V_0 &= \sum_{n=1}^{N} U_n V_n - \sum_{n=1}^{N} U_{n-1} V_n + U_0 V_0 \\
&= \sum_{n=0}^{N} U_n V_n - \sum_{n=0}^{N-1} U_n V_{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} U_n (V_n - V_{n+1}) + U_N V_N \\
&= -\sum_{n=0}^{N-1} U_n v_n + U_N V_N.
\end{aligned}$$

□

Cette écriture permet de montrer le résultat suivant.

Propriété 3.3.3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes. Si les sommes partielles de la série $\sum u_n$ constituent une suite bornée et si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroît vers 0, alors la série $\sum u_n V_n$ converge.*

Démonstration. On reprend les notations de la propriété 3.3.2. On va montrer que les sommes partielles de la série $\sum u_n V_n$ constituent une suite de Cauchy. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante notée C. On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} u_n V_n\right| &= \left|\sum_{n=0}^{q} u_n V_n - \sum_{n=0}^{p-1} u_n V_n\right| \\
&= \left|-\sum_{n=0}^{q-1} U_n v_n + U_q V_q + \sum_{n=0}^{p-2} U_n v_n - U_{p-1} V_{p-1}\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=p-1}^{q-1} U_n v_n\right| + |U_q V_q| + |U_{p-1} V_{p-1}| \\
&\leq C \left(\sum_{n=p-1}^{q-1} |v_n| + |V_q| + |V_{p-1}|\right).
\end{aligned}$$

Or, comme la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît, on a $|v_n| = |V_{n+1} - V_n| = V_n - V_{n+1}$. La somme du membre de droite est donc une somme télescopique, et on obtient

$$\left|\sum_{n=p}^{q} u_n V_n\right| \le C\left(\left(\sum_{n=p}^{q-1} V_n - V_{n+1}\right) + V_q + V_{p-1}\right) = C(V_p + V_{p-1}).$$

Le membre de droite tend vers 0 par hypothèse quand p et q tendent vers l'infini. La série $\sum u_n V_n$ satisfait donc le critère de Cauchy. □

Un corollaire important de ce théorème est le suivant :

Corollaire 3.3.4. *Pour toute suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissant vers 0 et tout réel θ non multiple de 2π, les séries*

$$\sum e^{in\theta} u_n, \ \sum \cos(n\theta) u_n \ \text{ et } \ \sum \sin(n\theta) u_n$$

convergent.

Démonstration. Comme on a

$$\sum \cos(n\theta) u_n = \sum \left(e^{in\theta}\frac{u_n}{2} + e^{-in\theta}\frac{u_n}{2}\right) \text{ et } \sum \sin(n\theta) u_n = \sum \left(e^{in\theta}\frac{u_n}{2} - e^{-in\theta}\frac{u_n}{2}\right),$$

il suffit d'étudier la série $\sum e^{in\theta} u_n$. Cette série rentre bien dans le cadre de la propriété 3.3.3 puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroît vers 0, et les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}$ vérifient (puisque comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$)

$$\left|\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}\right| = \left|\frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| \le \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|},$$

et sont donc bornées. □

3.4 Séries doubles

Dans cette partie, on s'intéresse à des séries indexées par *deux* entiers, de la forme $\sum u_{n,m}$. Il y a alors deux manières naturelles de définir une somme de la série : en faisant d'abord la somme sur les indices n, puis sur les indices m, ou bien dans l'autre sens. Autrement dit, on se demande tout d'abord si la quantité $v_m = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}$ est bien définie, et si c'est le cas, si la quantité $\sum_{m=0}^{\infty} v_m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}$ est bien définie. Une autre question intéressante est de savoir si il existe un lien entre les deux quantités

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \text{ et } \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

La propriété suivante dit essentiellement que dans le cas où $u_{n,m} \ge 0$, toutes les quantités que l'on vient de présenter sont définies et vérifient les relations auxquelles on peut s'attendre.

Propriété 3.4.1 (Théorème de Fubini)**.** *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs indexée par les couples $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Si pour tout entier naturel m la série $\sum_n u_{n,m}$ est convergente et si la* *série* $\sum_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right)$ *converge, alors, pour tout* n*, la série* $\sum_m u_{n,m}$ *converge, de même que la série* $\sum_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}\right)$*. De plus, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right) \tag{3.3}$$

On remarquera que, bien que très naturelle, l'égalité (3.3) n'est pas forcément vraie sans hypothèse sur la famille $(u_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ et ce même si les deux membres de l'égalité sont définis. En effet, en posant, pour $n, m \geq 0$,

$$u_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ -1 & \text{si } n = m+1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on vérifie les égalités

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} = 1 \text{ et } \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} = 0.$$

Démonstration. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a la majoration

$$\sum_{m=0}^{M} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_m u_{n,m}$ sont donc majorées, de sorte que cette série converge.

Ensuite, on a

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

En passant à la limite $M \to \infty$ (ce qui est licite puisque N est fini), on trouve

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m},$$

de sorte que les sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}$ sont bornées. Comme cette série est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge. En passant à la limite dans la dernière inégalité, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

Par symétries entre les indices n et m, l'inégalité inverse est également vraie, et on en déduit l'égalité des sommes. □

Pour généraliser la propriété 3.4.1 aux cas des nombres complexes, on doit ajouter une hypothèse de convergence absolue :

Propriété 3.4.2. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes indexée par les couples $(n,m)\in\mathbb{N}^2$. Si pour tout naturel m la série $\sum_n |u_{n,m}|$ est convergente et si la série $\sum\left(\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,m}|\right)$ converge, alors les séries $\sum_m u_{n,m}$, $\sum_n u_{n,m}$, $\sum\left(\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}\right)$ et $\sum\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,m}\right)$ convergent et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,m}\right)$$

Démonstration. La première partie de l'énoncé est une simple application de la propriété 3.4.1 et du fait qu'une série absolument convergente est convergente. Pour montrer l'égalité des sommes, on remarque qu'on a l'égalité

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}\right)-\sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,m}\right)\right|=\left|\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=N+1}^{\infty}u_{n,m}\right)-\sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}u_{n,m}\right)\right|,$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=N+1}^{\infty}u_{n,m}\right)-\sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}u_{n,m}\right)\right| &\leq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=N+1}^{\infty}|u_{n,m}|\right)+\sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}|u_{n,m}|\right)\\ &= \sum_{m=N+1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}|u_{n,m}|\right)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{N}|u_{n,m}|\right)\\ &\leq \sum_{m=N+1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,m}|\right)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}|u_{n,m}|\right).\end{aligned}$$

Le membre de droite tend bien vers 0, étant le reste d'une série convergente. □

On va maintenant énoncer une propriété du *produit de Cauchy*, ou *produit de convolution* de deux séries, qui est la définition naturelle du produit de deux séries.

Définition 3.4.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On définit leur* produit de Cauchy *$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule*

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}.$$

Le produit de Cauchy est commutatif, puisqu'un changement de variable $q=n-k$ dans la somme précédente donne $w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=\sum_{q=0}^{n}u_{n-q}v_q$.

Le produit de Cauchy se comporte bien vis à vis des séries absolument convergentes.

Propriété 3.4.4. *Si les séries à termes complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors il en est de même de la série $\sum w_n$, où $w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$. De plus on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}w_n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}v_n\right).$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n=0}^{N} |w_n| = \sum_{n=0}^{N} \left| \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}|.$$

On peut intervertir les deux sommes en écrivant

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{N} \sum_{k=n}^{N} |u_k||v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{N} \sum_{q=0}^{N-k} |u_k||v_q|,$$

la dernière égalité s'obtenant par le changement de variable $q = n - k$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{N} |w_n| \leq \sum_{k=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} |u_k||v_q| = \left(\sum_{k=0}^{N} |u_k| \right) \left(\sum_{q=0}^{N} |v_q| \right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q| \right),$$

ce qui montre que la série $\sum w_n$ est absolument convergente, les sommes partielles de la série des modules étant bornées. Pour montrer que la somme du produit de Cauchy vaut le produit des sommes, on écrit

$$\left| \sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{k=0}^{N} u_k \right) \left(\sum_{q=0}^{N} v_q \right) \right| = \left| \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} - \left(\sum_{k=0}^{N} u_k \right) \left(\sum_{q=0}^{N} v_q \right) \right|.$$

En intervertissant les sommes et en faisant le changement de variables $q = n - k$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} - \left(\sum_{k=0}^{N} u_k \right) \left(\sum_{q=0}^{N} v_q \right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{2N} \sum_{n=k}^{2N} u_k v_{n-k} - \sum_{k=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} u_k v_q \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{2N} \sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q - \sum_{q=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} u_k v_q \right|. \end{aligned}$$

On peut alors écrire,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{2N} \sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q - \sum_{q=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} u_k v_q \right| &= \left| \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q + \sum_{q=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{2N-q} u_k v_q \right| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{q=0}^{2N-k} |u_k||v_q| + \sum_{q=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{2N-q} |u_k||v_q| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{q=0}^{\infty} |u_k||v_q| + \sum_{q=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{\infty} |u_k||v_q| \\ &\leq \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q| \right) + \left(\sum_{q=N+1}^{\infty} |v_q| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \right). \end{aligned}$$

Les restes d'une série convergente tendent vers zéro, par conséquent le membre de droite tend vers 0, ce qui achève la démonstration. □

3.5 Exercices

Exercice 3.1.
Donner la nature des séries suivantes, et calculer la somme des éventuelles séries convergentes.

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} \ ; \ \sum e^{-n} \ ; \ \sum \ln(1+1/n) \ ;$$

$$\sum \frac{n^2+n-3}{n!} \ ; \ \sum 3^n \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{n+1}}\right) \ ; \ \sum \frac{1}{n} \ ;$$

$$\sum \frac{1}{\ln n} \ ; \ \sum \frac{\cos n}{2^n} \ ; \ \sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}.$$

Exercice 3.2.
Soit $\sum u_n$ une série de terme général positif.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^a$ converge pour tout $a \geq 1$.
2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum u_n^a$ diverge pour tout $a \leq 1$.
3. Montrer que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Exercice 3.3.
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Montrer que la série $\sum a_n 10^{-n}$ converge. On notera $0.a_1a_2a_3\dots$ sa limite. Combien vaut $0.999\dots$? Sous quelle condition les réels $0.a_1a_2a_3\dots$ et $0.b_1b_2b_3\dots$ sont-ils égaux ?

Exercice 3.4.
Soit $\sum u_n$ une série divergente dont le terme général est positif. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{\sum_{k=0}^n u_k}$ diverge.

Exercice 3.5.
Soit u_n une suite décroissante de nombres réels positifs.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_n nu_n = 0$. La réciproque est-elle vraie ? (On pourra s'inspirer de l'exercice précédent)
2. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge. Comparer les sommes de ces deux séries.
3. Comparer les natures des séries

$$\sum u_n \ ; \ \sum nu_{n^2} \text{ et } \sum 2^n u_{2^n}.$$

Exercice 3.6.
[Formule de Stirling]
On considère la suite $u_n = \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$.

1. Montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente (on utilisera le développement limité en 0 suivant : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$).

2. En déduire que u_n converge et qu'il existe une constante C (note 7) telle que

$$n! \sim Ce^{-n}n^n\sqrt{n}.$$

Exercice 3.7.
Donner la nature des séries suivantes (a et b sont des réels strictement positifs).

$$\sum 4^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \; ; \; \sum \frac{n!}{n^n} \; ; \; \sum \frac{a^n}{1+b^n} \; ; \; \sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$\sum \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} \; ; \; \sum \frac{n}{\prod_{k=1}^n (1+a^k)} \; ; \; \sum \frac{1}{n}\cos\left(2n\frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 3.8.
Donner un équivalent à $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, pour $\alpha > 1$.

Exercice 3.9.
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$? En utilisant le fait que la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ converge, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 3.10.
Donner la nature des séries données par

$$\sum \alpha^n n^\beta (\ln n)^\gamma$$

en fonction des réels α, β et γ (avec $\alpha > 0$).

Exercice 3.11.
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$?

Exercice 3.12.
Montrer l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \le e \le \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \frac{1}{N!N}.$$

En déduire que e est un nombre irrationnel.

Exercice 3.13.
Donner un équivalent à la fonction $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$, pour t tendant vers 1.

Exercice 3.14.
Que peut on dire du produit de Cauchy de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même ? On rappelle que le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ (on pose ici par convention $\frac{(-1)^0}{\sqrt{0}} = 0$).

(note 7). En fait, on a $C = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 3.15.
Montrer la formule, pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} z^n,$$

où z est un complexe vérifiant $|z| < 1$.

Exercice 3.16.
Soit z et z' deux nombres complexes.

1. Montrer que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. On notera sa somme e^z.
2. Montrer que $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

Chapitre 4

Fonctions de la variable réelle

4.1 Étude locale des fonctions

On va utiliser la terminologie suivante, qui sera utile par la suite.

Définition 4.1.1. *Un* voisinage *d'un réel a est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle non-trivial centré en a, c'est à dire un intervalle de la forme $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon > 0$.*

Par exemple, les ensembles $]-1,\infty[$, $\mathbb{R}$, ou $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n-1/3, n+1/3]$ sont des voisinages de 0. En revanche, les ensembles $[0,1]$, $[0,\infty[$ ou $\mathbb{Q}$ n'en sont pas.

Définition 4.1.2. *On dit qu'une fonction réelle f définie sur un voisinage I d'un point a* a pour limite *en a* la valeur *l si elle vérifie la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon).$$

Si la fonction f admet l comme limite au point a, on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = l,\ \textit{ou encore } f(x) \underset{x\to a}{\to} l.$$

On peut également parler des limites à gauche et à droite d'une fonction.

Définition 4.1.3. *On dit qu'une fonction f définie au voisinage*[(note 1)] *d'un point a* admet l comme limite à gauche en *a si elle vérifie la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (x \in]a-\eta, a[) \Rightarrow (|f(x)-l| \leq \varepsilon).$$

On peut définir de même la notion de limite à droite*.*
Si f admet l comme limite à gauche (resp. à droite) en a, on note

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \ \textit{ou} \ \lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = l \ (\textit{resp.} \ \lim_{x\to a^+} f(x) = l \ \textit{ou} \ \lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = l).$$

(note 1). On peut aussi supposer que f n'est définie que sur un *voisinage à gauche* de a, c'est-à-dire sur un ensemble contenant un sous-ensemble de la forme $]a-\varepsilon, a]$, pour $\varepsilon > 0$.

Définition 4.1.4. *On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a* est continue en a *si elle admet une limite en a.*
Si la fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est continue en tout point a de I, on dit qu'elle est continue sur I, *ou tout simplement qu'elle est* continue. *L'ensemble des fonctions continues sur I sera noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.*

Si f admet une limite à gauche en a et que $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$*, on dit que f est* continue à gauche en a. *On définit de même la continuité à droite.*

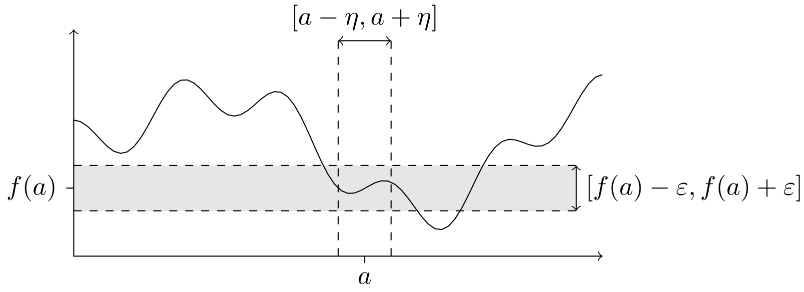

FIGURE 4.1 – Continuité d'une fonction.

On peut exprimer la continuité à partir des limites à gauche et à droite :

Propriété 4.1.5. *Une fonction f définie sur un voisinage de a est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.*

On peut caractériser la continuité de la manière suivante :

Propriété 4.1.6 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un voisinage d'un point a.*
- *La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a, la suite*(note 2) $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers $f(a)$.*
- *On peut également caractériser de cette manière la continuité à gauche (*resp. *à droite.) en se limitant aux suites prenant des valeurs strictement inférieures (*resp. *strictement supérieures) à a.*

Démonstration. Supposons la fonction f continue en a, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers a. Soit ε un réel positif. Par continuité de f en a, il existe un réel η tel que si $|x-a| \leq \eta$, alors $|f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$. Mais par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a, il existe un indice n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $|u_n - a| \leq \eta$. En conséquence, si $n \geq n_0$, on a $|f(u_n) - f(a)| \leq \varepsilon$. Cela montre que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Montrons l'implication inverse. Pour cela, nous allons passer par la contraposée. Supposons que la fonction f ne soit pas continue. Par conséquent, il existe un réel ε tel que pour tout η, il existe un x_η dans $]a-\eta, a+\eta[$ tel que $|f(a)-f(x_\eta)| \geq \varepsilon$. La suite $\left(x_{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a (puisque $|x_{1/n} - a| \leq \frac{1}{n}$) sans que $\left(f(x_{1/n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers $f(a)$ (puisque $|f(a) - f(x_{1/n})| \geq \varepsilon$). □

(note 2). Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et comme f est définie sur un voisinage de a, les u_n sont dans le domaine de définition de f pour n assez grand. Par conséquent, l'expression $f(u_n)$ a bien un sens pour n assez grand.

Cette caractérisation par les suites de la continuité permet de déduire des résultats sur les passages à la limite à partir des même résultats dans le cadre des suites.

Propriété 4.1.7. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point a telle que pour tout $x \neq a$ dans un voisinage de a on ait*

$$f(x) \leq g(x).$$

Si les deux fonctions admettent une limite en a, alors ces limites vérifient

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

La même inégalité est vraie pour les limites à gauche ou à droite.

Démonstration. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a. On a alors

$$\lim_n f(u_n) = \lim_{x\to a} f(x), \text{ et } \lim_n g(u_n) = \lim_{x\to a} g(x).$$

On conclut alors en passant à la limite en n dans l'inégalité $f(u_n) \leq g(u_n)$. □

Il est important de noter que l'on *ne peut pas* conclure à une inégalité stricte entre les limites si on a seulement une inégalité stricte entre les fonctions.

Propriété 4.1.8 ("Théorème des gendarmes")**.** *Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage d'un point a telle que pour tout x dans un voisinage de a on ait*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si f et h ont une limite en a et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$, alors g admet également une limite en a et

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

Démonstration. On note $\lambda = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers a. Pour tout n, on a l'inégalité $f(u_n) \leq g(u_n) \leq h(u_n)$. Comme de plus les deux suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite λ, le théorème des gendarmes pour les suites montre que la suite $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arbitraire, cela montre que g admet une limite en a valant λ. □

Propriété 4.1.9. *Soient f et g deux fonction continues en un point a. On a les propriétés suivantes :*
- *pour tout réel λ, la fonction λf est continue en a ;*
- *la fonction $f + g$ est continue en a ;*
- *la fonction fg est continue en a ;*
- *si $f(a) \neq 0$, alors f ne s'annule pas sur un voisinage de a. La fonction $\frac{1}{f}$ est alors bien définie sur un voisinage de a et est continue en a.*

Autrement dit, l'ensemble des fonction continues en un point a constitue une *algèbre*.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Propriété 4.1.10. *Soient f et g deux fonctions telles que f soit définie sur un voisinage I de a et continue en a, et que g soit définie sur $f(I)$ et continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. On note pour simplifer $l_g = \lim_{y \to f(a)} g(y)$ et $l_f = \lim_{x \to a} f(x)$.

Soit ε un réel strictement positif. Par continuité de g en $f(a)$, on peut trouver un réel η strictement positif tel que si y est dans $|f(a) - x| \leq \eta$, alors $|g(y) - l_g| \leq \varepsilon$. Mais alors, par continuité de f en a, on peut trouver un réel strictement positif ζ tel que si $|x - a| \leq \zeta$, alors $|f(x) - l_f| \leq \eta$. Par conséquent, si $|x - a| \leq \zeta$, alors $|g(f(x)) - l_g| \leq \varepsilon$. On a donc montré que $g \circ f$ admettait l_g comme limite en a. □

4.2 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 4.2.1. *[Théorème des valeurs intermédiaires] Soit f une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'image $f(I)$ de I par f est un intervalle.*

Autre formulation :

Théorème 4.2.2 (Théorème des valeurs intermédiaires 2)**.** *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si c est tel que $f(a) < c < f(b)$ ou $f(b) < c < f(a)$, alors il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = c$.*

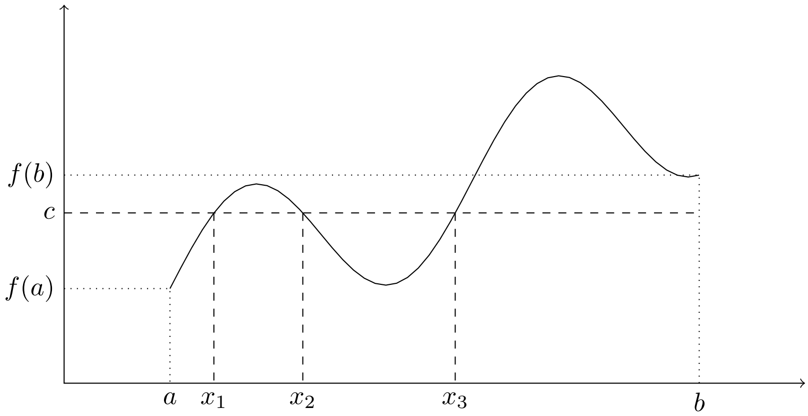

FIGURE 4.2 – Le théorème des valeurs intermédiaires. Les points x_1, x_2, x_3 correspondent aux valeurs possibles de x.

Il est important de comprendre que ce résultat *n'est pas* évident. Pour s'en convaincre, on peut méditer sur l'exemple de la fonction de $\mathbb{Q}$ dans lui-même qui à x associe $x^2 - 2$. Cette fonction continue prend une valeur négative en 0 et positive en 2, mais ne s'annule jamais (car $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel).

Une preuve du théorème des valeurs intermédiaires fera en fait appel d'une manière ou d'une autre à la complétude de $\mathbb{R}$, que ce soit sous la forme de suites de Cauchy, de la propriété de la borne supérieure, de la propriété des segments emboîtés, etc.

Démonstration. On montre la deuxième formulation du théorème. On suppose $f(a) < c < f(b)$. Le cas inverse s'en déduit en appliquant le résultat à la fonction $-f$. On pose $A_c = \{x \in [a, b], f(x) \leq c\}$.

L'ensemble A_c est borné (car contenu dans $[a,b]$). On peut donc définir $x_0 = \sup A_c$. On va montrer que $f(x_0) = c$. Tout d'abord remarquons que par continuité on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) < c$ pour x dans $[a, a+\varepsilon]$ et que $f(x) > c$ pour x dans $[b-\varepsilon, b]$. Par conséquent, x_0 est un élément de $]a,b[$. Ensuite, on remarque que $f(x) > c$ sur $]x_0, b]$. Par continuité, on obtient $f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq c$. D'autre part, comme x_0 est la borne supérieure de A_c, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A_c qui converge vers x_0. Or $f(y_n) \leq c$, d'où $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \leq c$. On déduit que $f(x_0) = c$. □

Propriété 4.2.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe y et z dans $[a,b]$ tels que*

$$f(y) \leq f(x) \leq f(z) \text{ pour tout } x \text{ de } [a,b].$$

Démonstration. Ce résultat est basé sur la compacité de l'intervalle $[a,b]$. Il faudra donc a un moment de la preuve utiliser cette propriété, par exemple avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On pose $M = \sup f([a,b])$ (qui peut a priori être infini), et on choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dont on note z la limite. Par continuité de f, la suite $\left(f(x_{\varphi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(z)$, d'où $M = f(z)$. On donc a montré que la fonction atteint sa borne supérieure. Le cas de la borne inférieure se fait de manière symétrique. □

Définition 4.2.4. *Soit f une fonction de I un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue si elle vérifie la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ (|x-y| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Cette définition signifie intuitivement que la fonction f est continue “partout de la même manière”. Il est intéressant de comparer cette définition avec celle de continuité. La continuité sur I s'exprime par l'expression

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in I,\ (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

En revanche, l'uniforme continuité s'exprime par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Autrement dit, dans le cas de la continuité simple, η peut dépendre de x, alors que pour l'uniforme continuité η doit être le même pour tout x. On voit notamment que :

Propriété 4.2.5. *Une fonction uniformément continue est continue.*

La réciproque de cette propriété est bien entendu fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ (en effet les points $x_n = n$ et $y_n = n + 1/n$ vérifient $|x_n - y_n| = |n - (n+1/n)| = 1/n \to 0$, alors que $|f(x_n) - f(y_n)| = |n^2 - (n^2 + 2 + 1/n^2)| = 2 + 1/n^2 > 2$).

Toutefois, on a une réciproque à la propriété 4.2.5 si l'on ne considère la fonction que sur un *segment* :

Théorème 4.2.6. *[Théorème de Heine] Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. On va montrer la contraposée. La proposition "f n'est pas uniformément continue sur I" s'écrit avec les quatificateurs

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ \exists y \in I,\ (|x-y| \leq \eta \text{ et } |f(x_\eta) - f(y_\eta)| > \varepsilon).$$

Choisissons un tel ε. On considère des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Par la propriété de Bolzano-Weierstrass on en extrait des sous-suites convergentes $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (on est sur le segment $[a,b]$) (note 3). Comme on a $\left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| \leq \frac{1}{\varphi(n)}$, les deux suites ont la même limite l. Or, on a l'inégalité $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$, qui fait que la fonction f ne peut pas être pas continue. □

Le théorème 4.2.6 permet par exemple d'approcher les fonctions continues par des fonctions en escalier au sens de la proposition suivante. Cela sera notamment utile pour définir l'intégrale d'une fonction continue.

Propriété 4.2.7. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g_ε telle que $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$.*

Démonstration. Quitte à faire un changement de variable on peut supposer $[a,b] = [0,1]$. On considère donc une fonction f continue sur le segment $[0,1]$, et ε un réel strictement positif. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1]$ et il existe donc un entier N tel que si $|x-y| < \frac{1}{N}$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On a donc pour tout entier $1 \leq i \leq N$ et tout $x \in [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$, la majoration $\left|f\left(\frac{i}{N}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$. On définit alors la fonction en escalier g_ε de la manière suivante :

$$g_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{N}\right) \times \mathbf{1}_{]\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]}.$$

On peut alors vérifier que la fonction g_ε vérifie les conditions voulues. □

Un cas particulier de fonction uniformément continue est le suivant :

Définition 4.2.8. *On dit qu'une fonction de I dans $\mathbb{R}$ est* Lipshitzienne *si il existe une constante k telle que pour x et y dans I, on ait*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Propriété 4.2.9. *Une fonction Lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Dans la définition de l'uniforme continuité, pour un ε donné, il suffit de choisir $\eta = \varepsilon/k$. □

La réciproque est bien entendu fausse, comme on le voit sur l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0,\infty[$. En effet, les points 0 et $1/n$ vérifient $\left|\sqrt{1/n} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{1/n} = \sqrt{n}|1/n - 0|$. Si la fonction était k-Lipschitzienne, on aurait alors $\sqrt{n}|1/n - 0| \leq k|1/n - 0|$, de sorte que k devrait vérifier $k \geq \sqrt{n}$ pour tout n, ce qui est impossible.

(note 3). On peut prendre la même fonction extractrice φ pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en extrayant d'abord une sous-suite convergente $\left(x_{\varphi_0(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis en extrayant une sous-suite convergente $\left(y_{\varphi_0(\varphi_1(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\left(y_{\varphi_0(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose alors $\varphi = \varphi_0 \circ \varphi_1$.

4.3 Dérivation

Définition 4.3.1. *On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a est* dérivable en a *si la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, appelée* taux d'accroissement *converge vers une limite quand h tend vers 0. La limite du taux d'accroissement est notée $f'(a)$ et appelée* dérivée de f au point a.
On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert est dérivable *si elle est dérivable en tout point de I. On peut alors définir sur I la fonction f' appelée* dérivée *de f.*

Au vu de cette définition, dire qu'une fonction est dérivable en un point a revient à dire que cette fonction est proche d'une fonction affine au voisinage de a. Plus précisément f est proche de la fonction

$$x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$$

(voir la deuxième remarque après le corollaire 4.5.8). Ceci est illustré sur la figure 4.3 où l'on a représenté le graphe d'une fonction f ainsi que sa tangente en un point a, qui a pour équation $y = f(a)+(x-a)f'(a)$. L'écart entre la fonction et la tangente tend vers 0 quand x tend vers a.

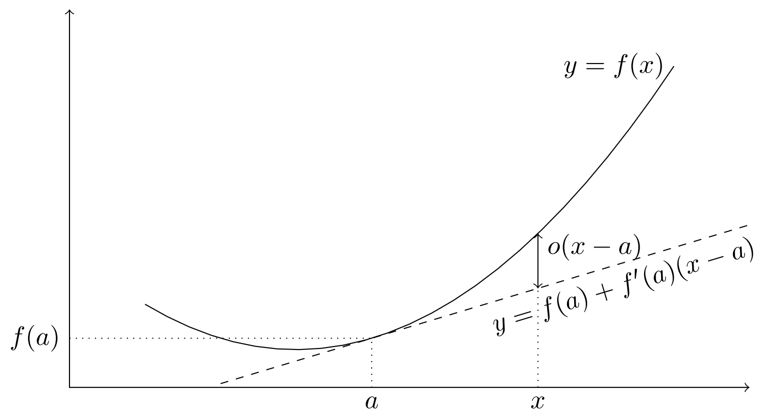

FIGURE 4.3 – Une fonction et sa tangente.

La dérivabilité est une notion plus forte que la notion de continuité :

Propriété 4.3.2. *Si f est une fonction définie au voisinage d'un point a et est dérivable au point a, alors f est continue au point a.*

Démonstration. On a

$$|f(a+h) - f(a)| = h\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right|.$$

Or, si f est dérivable en a, $\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right|$ converge (vers $|f'(a)|$) quand h tend vers 0, et donc reste borné, de sorte que

$$|f(a+h) - f(a)| \leq Ch \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

□

En revanche on peut trouver des fonctions continues mais non dérivables. L'exemple le plus simple est la fonction valeur absolue, qui est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0. En effet, on a

$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0, \\ -1 & \text{si } h < 0, \end{cases}$$

de sorte que le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0.

La fonction valeur absolue est en revanche dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On peut quand même trouver des fonctions continue qui ne sont dérivables en aucun point, comme dans la proposition suivante.

Propriété 4.3.3. *Si a et b sont deux réels vérifiant $|a| < 1$ et $|ab| > 1$, alors la fonction f définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point.

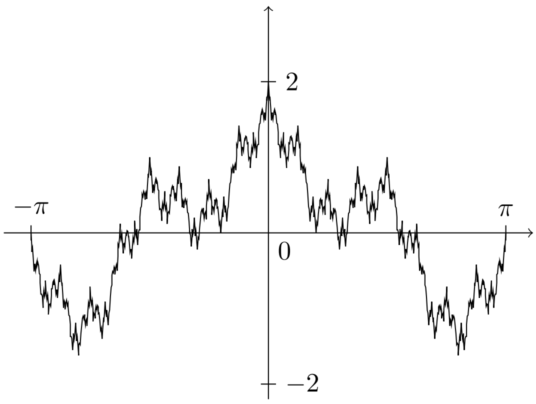

FIGURE 4.4 – Un exemple de fonction continue mais dérivable en aucun point.

Cette propriété se comprend bien en remarquant que la série $\sum a^n$ converge de sorte que la série définissant f est absolument convergente (note 4), alors que la série $\sum (ab)^n$ diverge, de sorte que la série qui est naturellement candidate pour définir f', à savoir $-\sum (ab)^n \sin(b^n x)$, n'est a priori pas nécessairement convergente (ceci ne constitue bien entendu pas une preuve complète !). Sur la figure 4.4, on a représenté la fonction f pour les valeurs $a = 0.5$ et $b = 4$.

Démonstration. Admis. $\square$

La dérivabilité est stable par les opérations suivantes :

Propriété 4.3.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point a.*

— *La fonction $f + g$ est dérivable au point a et on a $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*

(note 4). Ce qui assure notamment que f est continue, voir la propriété 6.1.4.

— *La fonction* λf *est dérivable en* a *et* $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ *;*
— *La fonction* fg *est dérivable en* a *et* $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$ *;*
— *Si* $f(a)$ *est non-nul, la fonction* $\frac{1}{f}$ *est dérivable, et* $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$.

Démonstration. Les propriétés de linéarité viennent des propriétés équivalentes pour les limites.

Pour le produit, on écrit

$$\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Les quantités $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $g(a+h)$, $f(a)$ et $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ convergent respectivement vers $f'(a)$, $g(a)$, $f(a)$ et $g'(a)$, et on sait que l'on peut passer à la limite dans un produit.

Pour l'inverse d'une fonction, on écrit (comme f est continue, on a $f(a+h) \neq 0$ pour h assez petit)

$$\frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} = \frac{f(a) - f(a+h)}{h} \times \frac{1}{f(a)f(a+h)},$$

qui converge bien vers la limite voulue. □

La formule donnant la dérivée du produit se comprend bien sur la figure 4.5 : la fonction $x \mapsto f(x)g(x)$ est la fonction qui a x associe la surface d'un rectangle de côtés $f = f(x)$ et $g = g(x)$. Si les côtés varient respectivement d'une taille $df = f(x+h) - f(x)$ et $g(x+h) - g(x)$, alors la surface du rectangle varie de $f.dg + g.df + df.dg$. Pour une fonction dérivable, $df.dg$ est de l'ordre de h^2 et est donc négligeable, pour h petit devant $f.dg + g.df$ qui est de l'ordre de h. On obtient donc la formule $d(fg) = f.dg + g.df$.

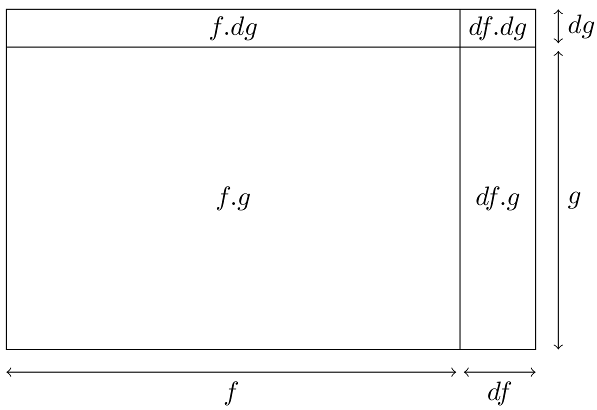

FIGURE 4.5 – Dérivée d'un produit.

On peut aussi composer les fonctions dérivables :

Propriété 4.3.5. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable au point* a *et* g *une fonction définie sur* $f(I)$ *et dérivable en* $f(a)$*. Alors la fonction* $g \circ f$ *est dérivable en* a *et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Démonstration. Soit h un réel positif. On a

$$\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h}=\frac{g(f(a)+hf'(a)+h\tau_h)-g(f(a))}{h},$$

où l'on a posé $\tau_h=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$, qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. En conséquence,

$$\begin{aligned}\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h}&=\frac{g(f(a)+hf'(a)+h\tau_h)-g(f(a))}{(f'(a)+\tau_h)h}(f'(a)+\tau_h)\\&=\frac{g(f(a)+\varepsilon_h)-g(f(a))}{\varepsilon_n}(f'(a)+\tau_h),\end{aligned}\tag{4.1}$$

où l'on a posé $\varepsilon_h=(f'(a)+\tau_h)h$. Comme ε_h tend également vers 0 quand h tend vers 0, l'expression en (4.1) tend bien vers $g'(f(a))f'(a)$ quand h tend vers 0. □

On peut aussi calculer la dérivée d'une fonction réciproque de la manière suivante :

Propriété 4.3.6. *Soit f une fonction bijective d'un itervalle ouvert I dans un intervalle ouvert J. On suppose f et sa réciproque continues. Pour a dans I, si f est dérivable en a avec $f'(a)$ non-nul, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ avec*

$$(f^{-1})'\Big(f(a)\Big)=\frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. En posant $\tau_h=f^{-1}(f(a)+h)-a$, on obtient $f(a+\tau_h)-f(a)=h$, de sorte que

$$\frac{f^{-1}(f(a)+h)-f^{-1}(f(a))}{h}=\frac{f^{-1}(f(a)+h)-a}{h}=\frac{\tau_h}{f(a+\tau_h)-f(a)}.$$

Par continuité de f et de f^{-1}, la quantité τ_h tend vers 0 quand h tend vers 0 ce qui nous donne le résultat. □

Propriété 4.3.7. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de a et dérivable en a. Si a est un extremum local pour la fonction f, alors $f'(a)=0$.*

On rappelle que si il existe un voisinage I d'un point a tel que $f(x)\leq f(a)$ pour tout x dans I, on dit que a est un *maximum local* de f (ou que f admet un maximum local en a), si $f(a)\leq f(x)$ pour x dans I on dit que a est un *minimum local*, et que si a est un minimum local ou un maximum local, on dit que a est un *extremum local*.

Sur la figure 4.6, on voit que la fonction a une dérivée nulle en ses extrema locaux a_i ($i\in\{1,2,3\}$) situés à l'interieur de son intervalle de définition, mais pas forcément en ses extrema c_i ($i\in\{1,2\}$), situés aux bornes de l'intervalle de définition, puisque la fonction n'est pas définie sur un *voisinage* de ces points. Toutefois, la dérivée peut s'annuler en des points qui ne sont pas des extrema locaux, comme par exemple en b_i ($i\in\{1,2\}$).

Démonstration. On peut supposer (quitte à changer f en $-f$) que a est un maximum local pour f. On a donc, pour h assez petit $f(a+h)\leq f(a)$. En conséquence,

$$f'(a)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0 \text{ et } f'(a)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0.$$

La quantité $f'(a)$ est donc à la fois positive et négative, elle est donc nulle. □

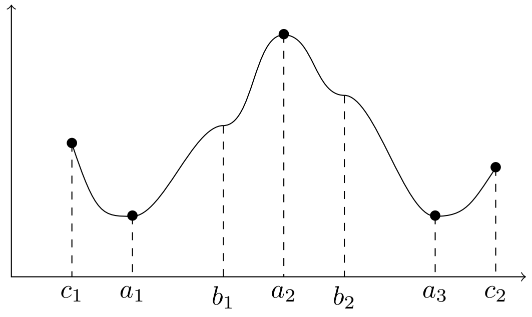

FIGURE 4.6 – Extrema d'une fonction. Les points a_i sont des extrema locaux de la fonction représentée.

Il est important de remarque que l'on peut avoir $f'(a) = 0$ sans que f atteigne un minimum en a. L'exemple le plus classique est la fonction $x \mapsto x^3$ qui a une dérivée nulle en 0. C'est également le cas de la fonction représentée en Figure 4.6 aux points b_1 et b_2.

Théorème 4.3.8 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Le théorème de Rolle est illustré sur la figure 4.7, avec les différentes valeurs possibles de c.

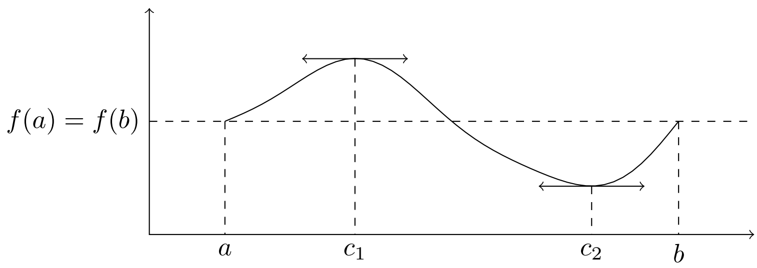

FIGURE 4.7 – Le théorème de Rolle.

Démonstration. Le résultat est évident si la fonction f est constante égale à $f(a)$ sur l'intervalle $[a, b]$, car la dérivée de f est alors nulle en tout point de $]a, b[$.

On peut donc supposer que f est non constante, et quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'elle prend une valeur strictement supérieure à $f(a)$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle atteint son maximum en un point c, qui est distinct de a et b (puisque la fonction atteint une valeur strictement supérieure à $f(a) = f(b)$). Par la propriété 4.3.7, on déduit que $f'(c) = 0$. $\square$

Théorème 4.3.9 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe un élément c de $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

*Si la dérivée de f est bornée, on déduit notament de cette formule l'*inégalité des accroissements finis *:*

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Le théorème des accroissements finis est illustré sur la figure 4.8.

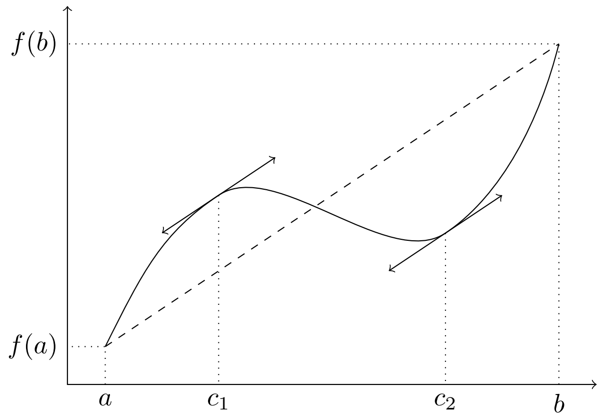

FIGURE 4.8 – Le théorème des accroissements finis. Les flèches correspondent à une pente de $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

L'inégalité des accroissements finis se comprend très bien par un exemple de la vie courante : si vous vous déplacer en voiture sur l'autoroute en respectant la limite de 130km/h, au bout d'une heure vous vous trouverez nécéssairement à moins de 130 kilomètres de votre point de départ.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La fonction g est dérivable sur $]a, b[$ (comme somme de f et d'un polynôme) et vérifie $g(a) = 0$, $g(b) = 0$. Le théorème de Rolle nous permet de conclure qu'il existe c tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a donc $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Propriété 4.3.10. *Soit f une fonction dérivable définie sur un* intervalle ouvert*. Alors :*
- *f est croissante si et seulement si elle vérifie $f'(x) \geq 0$ pour tout x ;*
- *f est décroissante si et seulement si elle vérifie $f'(x) \leq 0$ pour tout x ;*
- *f est constante si et seulement si elle vérifie $f'(x) = 0$ pour tout x ;*
- *Si f vérifie $f'(x) > 0$ sur I, alors elle est strictement croissante ;*
- *Si f vérifie $f'(x) < 0$ sur I, alors elle est strictement décroissante ;*

Démonstration. Supposons que f est croissante. Si $h > 0$ alors, $f(x+h)-f(x) \geq 0$, d'où $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. De même, si $h < 0$, on a $f(x+h) - f(x) \leq 0$, de sorte $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. En passant à la limite $h \to 0$, on trouve donc $f'(x) \geq 0$. De même, on montre qu'une fonction décroissante a une dérivée négative. Par conséquent, une fonction constante, qui est croissante et décroissante, a une dérivée à la fois positive et négative. Cette dérivée est donc nulle.

Inversement, soit f une fonction ayant une dérivée positive sur l'intervalle $]a, b[$, et soient $\alpha < \beta$ deux points de $]a, b[$. Par le théorème des accroissements finis, on peut trouver c dans $]a, b[$ tel que $f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha)$ qui est positif. Par conséquent, $f(\alpha) \leq f(\beta)$, ce qui montre que f est croissante. De même on montre qu'une fonction à dérivée négative est décroissante et par conséquent, qu'une fonction à dérivée nulle (c'est à dire à la fois positive et négative) est à la fois croissante et décroissante, et donc constante. Enfin, on remarque que si la dérivée de f est strictement positive, la quantité $f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha)$ est également strictement positive, de sorte que f est strictement croissante. □

Cette propriété n'est vraie que si f est définie sur un intervalle, comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$ par la formule

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases},$$

qui a une dérivée nulle sans être constante. Autre exemple : la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ qui a x associe $1/x$ a une dérivée strictement négative $(-1/x^2)$ en tout point de $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

D'autre part, on ne peut pas affirmer qu'une fonction dérivable et strictement croissante admet une dérivée strictement positive, comme le montre le contre-exemple de la fonction $x \mapsto x^3$, définie sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, mais qui admet une dérivée nulle en $x = 0$.

Corollaire 4.3.11. *Si f et g sont deux fonctions dérivables définies sur un même* intervalle *I et telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout x de I, alors elles ne diffèrent que par une constante :*

$$f = g + f(a) - g(a),$$

pour tout a de I.

Démonstration. La fonction $f - g$ a une dérivée uniformément nulle, elle est donc constante. □

4.4 Comportement asymptotique des fonctions

4.4.1 Relations de comparaison

On peut utiliser les mêmes relations de comparaison pour des fonctions que pour des suites. Cette fois-ci, on va comparer le comportement de deux fonctions au voisinage d'un point donné (et non pas à l'infini comme on le faisait pour les suites).

Définition 4.4.1. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a.*

- *On dit que f est* dominée *par g au voisinage de a si il existe une constante C telle que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ pour tout x dans un voisinage de a. On notera cette propriété $f(x) = \mathcal{O}_a(g(x))$ ou "$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ au voisinage de a" ou même simplement $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ si il n'y a pas d'ambiguïté sur le point a.*

— *On dit que f est* négligeable *devant g au voisinage de a si il existe une fonction ε définie au voisinage de a dont la limite en a vaut 0 et telle que $|f(x)| \leq |\varepsilon(x)g(x)|$. On notera $f(x) = o_a(g(x))$, ou $f(x) = o(g(x))$.*

— *On dit que f est* équivalente *à g au voisinage de a si $f - g$ est négligeable devant g. On notera $f(x) \sim_a g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$.*

De manière équivalente, on aurait pu définir les relations de comparaison à partir de ce que l'on a déjà fait sur les suites :

Propriété 4.4.2. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a.*

— *On a $f(x) = o_a(g(x))$ si et seulement si $f(u_n) = o(g(u_n))$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a.*

— *On a $f(x) = \mathcal{O}_a(g(x))$ si et seulement si $f(u_n) = \mathcal{O}(g(u_n))$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a.*

— *On a $f(x) \sim_a g(x)$ si et seulement si $f(u_n) \sim g(u_n)$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a.*

Comme pour les suites, on a des caractérisations équivalentes de ces notions si la fonction g ne s'annule pas près de a :

Propriété 4.4.3. *Soit g une fonction définie sur un voisinage V de a telle que $g(x) \neq 0$ pour x dans $V \setminus \{a\}$. Alors :*

— *$f(x) \sim g(x)$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$;*

— *$f(x) = o(g(x))$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;*

— *$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)}$ est borné pour x dans un certain voisinage de a.*

4.4.2 Développements limités

On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a admet au un *développement limité* à l'ordre n en a si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n).$$

En pratique on préfèrera se ramener, par le changement de variables $x = a + h$ à l'écriture

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o_0(h^n),$$

qui permet de ne considérer que des développements limités en 0.

Les développements limités permettent d'approcher localement une fonction par une fonction polynôme. Nous illustrons ceci sur la figure 4.9, dans le cas de la fonction exponentielle qui admet pour développement limité

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^6).$$

On a représenté sur la figure 4.9 le graphe de fonction exponentielle à laquelle a été retranché le début de son développement limité, à savoir les fonctions e^x, $e^x - 1$, $e^x - 1 - x$, $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ et $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{24}$. On a tracé le graphe sur un petit voisinage de 0 (à savoir $[-0.1, 0.1]$). Sur ce voisinage, la fonction se confond quasiment avec le premier terme du développement limité. Par exemple $e^x - 1 - x \simeq \frac{x^2}{2}$. Noter que l'échelle change d'un graphe au suivant.

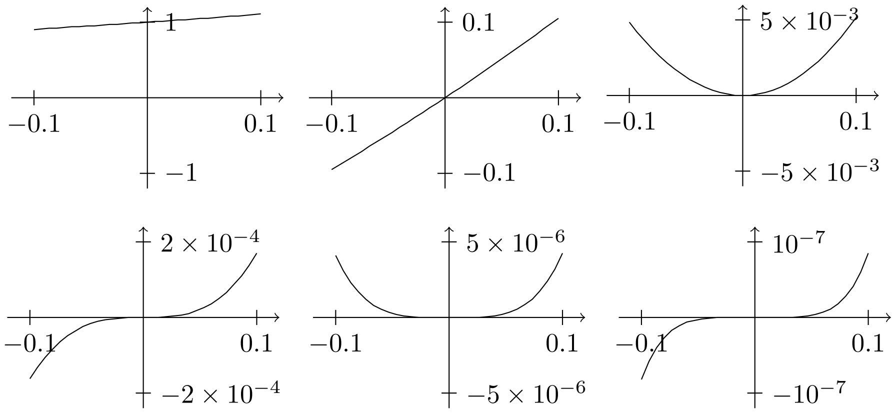

FIGURE 4.9 – Exemple de développement limité : les graphes des fonctions e^x, $e^x - 1$, $e^x - 1 - x$, $e^x - 1 - x - x^2/2$, $e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6$ et $e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6 - x^4/24$.

Propriété 4.4.4. *Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de 0 dont la dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par*

$$f'(x) = P_n(x) + o(x^n),$$

où P_n est un polynôme de degré n. Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$, donné par

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P_n(y)dy + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, on peut intégrer terme à terme un développement limité.

Démonstration. On écrit $f'(x) - P_n(x) = x^n \varepsilon(x)$, où ε est une fonction tendant vers 0 en 0. La fonction $x \mapsto f(x) - f(0) - \int_0^x P_n(y)dy$ est une fonction nulle en 0, dérivable, de dérivée $f' - P_n$. L'inégalité des accroissements finis donne alors

$$\begin{aligned}\left| f(x) - f(0) - \int_0^x P_n(y)dy \right| \leq \sup_{y\in[-x,x]} |f'(y) - P_n(y)| \times |x| &= \sup_{y\in[-x,x]} |\varepsilon(y)y^n| \times |x| \\ &\leq \sup_{y\in[-x,x]} |\varepsilon(y)| \times |x|^{n+1} \\ &= o(x^{n+1}).\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que la fonction $x \mapsto \sup_{y\in[-x,x]} |\varepsilon(y)|$ tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0. $\square$

Propriété 4.4.5. *Soit g une fonction admettant un développement limité en un point a à l'ordre n*

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

et f une fonction admettant un développement limité à l'ordre m en α_0 (remarquer que $\alpha_0 = g(a)$)

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha_0) + \ldots + \beta_m(x - \alpha_0)^m + o((x - \alpha_0)^m)$$

alors la fonction $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre $\min(n, m)$ *en a, obtenu en composant les développements limités de f et g*

$$\begin{aligned} f \circ g(x) = & \beta_0 \\ & + \beta_1(\alpha_1(x - a) + \ldots + \alpha_n(x - a)^n) \\ & + \ldots \\ & + \beta_m(\alpha_1(x - a) + \ldots + \alpha_n(x - a)^n)^m \\ & + o((x - a)^{\min(m,n)}), \end{aligned}$$

en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à $\min(n, m)$.

Démonstration. On écrit les termes négligeables explicitement sous la forme $(x - a)^n \varepsilon_1(x - a)$ et $(x - \alpha_0)^m \varepsilon_2(x - \alpha_0)$, où $\varepsilon_1(y)$ et $\varepsilon_2(y)$ tendent vers 0 lorsque y tend vers 0. On remplace ensuite le développement de $g(x)$ dans celui de $f(x)$ et on développe. □

4.5 Développement de Taylor

Définition 4.5.1. *Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est* de classe $\mathcal{C}^1$ *si elle est* dérivable *et si sa dérivée est* continue. *De même on définit par récurrence les fonctions* de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ *comme les fonctions dérivables dont la dérivée est de classe $\mathcal{C}^k$. On définit également les fonctions* de classe $\mathcal{C}^\infty$ *comme les fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier k.*

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (avec k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

On définit la dérivée n-ième d'une fonction par la relation de récurrence

$$\begin{cases} f^{(0)}(x) = f(x), \\ f^{(n+1)} = (f^{(n)})'(x) \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

Définition 4.5.2. *Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un point a. On dit que f est* n fois dérivable *au point a si elle est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ au voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.*

Si f est n fois dérivable en tout point d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit qu'elle est n fois dérivable sur I.

On notera parfois $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe k fois dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété 4.5.3. *L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ (avec k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) est stable par combinaison linéaire et par produit. Par ailleurs, si f et g sont deux fonctions n fois dérivables en un point a, on a (formule de Leibniz)*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Démonstration. Cela se déduit des propriétés de dérivabilité d'un produit ou d'une combinaison linéaire. La formule de Leibniz se montre par récurrence. □

On veut approcher une fonction f par un polynôme. Une manière naturelle de faire au voisinage d'un point a est d'utiliser la proposition suivante :

Propriété 4.5.4. *Soit f une fonction n fois dérivable sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Il existe un unique polynôme P_n de degrè inférieur ou égal à n dont les dérivées en a coïncident avec celles de f. Plus précisément, pour $0 \leq k \leq n$, on a*

$$f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a).$$

Le polynôme P_n, appelé polynôme de Taylor *d'ordre n de f, est donné par*

$$P_n = f(a) + f'(a)(X-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(X-a)^n}{n!}. \tag{4.2}$$

Démonstration. L'ensemble E_n des polynôme de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel de dimension $n+1$. La famille $(\Pi_a^k)_{k=0,\ldots,n}$ définie par $\Pi_k^a = \frac{(X-a)^k}{k!}$ est une base de cet espace dont la base duale $(\delta_k^a)_{k=0,\ldots,n}$ est définie par $\delta_k^a(P) = P^{(k)}(a)$ (pour le prouver, il suffit de vérifier que $\delta_k^a(\Pi_q^a)$ vaut 1 si $k = q$ et 0 dans le cas contraire).

Pour toute suite $(\lambda_k)_{k=0,\ldots,n}$, il existe donc un unique polynôme P de E_n tel que $\delta_k^a(P) = \lambda_k$, donné par $P = \sum_{k=1}^n \lambda_k \Pi_k^a$. En appliquant ce résultat à $\lambda_k = f^{(k)}(a)$, on obtient le résultat annoncé. □

Une question naturelle est alors de calculer l'erreur commise en approchant $f(x)$ par la valeur $P_n(x)$ où P_n est le polynôme de Taylor défini en (4.2). Plus précisément, on cherche une expression de la quantité $f(x) - P_n(x)$, appelée *reste de Taylor*. C'est l'objet des formules de Taylor, qui sont données par les théorèmes 4.5.5, 4.5.6 et 4.5.7

Théorème 4.5.5 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un voisinage du point a, alors on a, pour tout h suffisament petit, le développement :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^{a+h} (a+h-x)^n f^{(n+1)}(x)dx.$$

Le reste intégral peut aussi s'écrire, après le changement de variables $x = a + th$ comme

$$\frac{1}{n!}\int_a^{a+h} (a+h-x)^n f^{(n+1)}(x)dx = \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th)dt.$$

On remarquera que dans le cas $n = 0$, la formule de Taylor avec reste intégral est simplement la formule $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$ exprimant une fonction $\mathcal{C}^1$ comme l'intégrale de sa dérivée.

Démonstration. C'est une récurrence sur n utilisant la formule d'intégration par parties. Pour $n = 0$, l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} f'(x)dx$$

exprime simplement la fonction comme l'intégrale de sa dérivée (ce qui est prouvé au chapitre 5 dans la propriété 5.2.1). En supposant vraie l'égalité au rang n, on montre l'égalité au rang $n+1$ en intégrant par parties ($f^{(n+1)}$ se dérive en $f^{(n+2)}$ et $\frac{1}{n!}(a+h-x)^n$ se primitive en $-\frac{1}{(n+1)!}(a+h-x)^{n+1}$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^n f^{(n+1)}(x)dx =& \left[-\frac{1}{(n+1)!}(a+h-x)^{n+1}f^{(n+1)}(x)\right]_a^{a+h}\\&+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^{n+1}f^{(n+2)}(x)dx\\=&0+\frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(a)\\&+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^{n+1}f^{(n+2)}(x)dx.\end{aligned}$$

□

On peut affaiblir l'hypothèse "f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$" quitte à avoir une expression moins précise du reste.

Théorème 4.5.6 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Si f est une fonction $n+1$ fois dérivable sur un voisinage d'un point a, alors pour tout h tel que $[a, a+h]$ (note 5) soit inclus dans le domaine de définition de f, il existe α dans $[0,1]$ tel que*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\alpha h).$$

Notamment, si $f^{(n+1)}$ est bornée, on en déduit la majoration de l'erreur :

$$\left|f(a+h) - \left(f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!}\right)\right| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{0\leq\alpha\leq 1}\left|f^{(n+1)}(a+\alpha h)\right|.$$

On remarquera que le cas $n=0$ est exactement le théorème des accroissements finis.

Démonstration. On pose

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(1-t)^k h^k f^{(k)}(a+th)}{k!} - \lambda(1-t)^{n+1}.$$

On vérifie alors que φ est dérivable, puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f^{(n)}$ est dérivable. On a $\varphi(0) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k f^{(k)}(a)}{k!} - \lambda$ et $\varphi(1) = f(a+h)$. Le choix

$$\lambda = -f(a+h) + \sum_{k=0}^{n}\frac{h^k f^{(k)}(a)}{k!}$$

permet donc d'avoir $\varphi(0) = \varphi(1)$, ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ. Il existe donc un α dans $[0,1]$ tel que

$$\varphi'(\alpha) = \frac{(1-\alpha)^n h^{n+1} f^{(n+1)}(a+\alpha h)}{n!} + (n+1)\lambda(1-\alpha)^n = 0,$$

et la définition de λ permet de conclure. □

(note 5). ou $[a+h, a]$, si h est négatif.

On peut également se passer de l'hypothèse selon laquelle $f^{(n)}$ est dérivable en cherchant une expression encore moins fine du reste.

Théorème 4.5.7 (Formule de Taylor-Young)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ au voisinage d'un point a telle que f^{n-1} soit dérivable en a, alors on a le développement :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + o(h^n).$$

Le cas $n = 0$ est simplement la définition de la continuité de f en a, et le cas $n = 1$ est la définition de la dérivabilité de f en a.

Démonstration. On le montre par récurrence.

Le cas $n = 1$ correspond à la définition de la dérivabilité de f en a.

Supposons la propriété vraie au rang n. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $f^{(n)}$ dérivable, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et sa dérivée $n-1^{\text{ème}}$ est dérivable, on peut donc lui appliquer la propriété, de sorte que

$$f'(a+h) = f'(a) + hf''(a) + \frac{h^2 f'''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n+1)}(a)}{n!} + o(h^n).$$

Il suffit ensuite d'intégrer ce développement limité en vertu de la propriété 4.4.4. □

Il est important de remarquer que dans chacun des théorèmes 4.5.5, 4.5.6 et 4.5.7, les hypothèses correspondent aux hypothèses “minimales” pour que la formule obtenue ait un sens. En effet :

— dans la formule de Taylor avec reste intégral, on doit pouvoir définir l'intégrale faisant intervernir la fonction f^{n+1}, on demande donc par exemple que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$;

— dans la formule de Taylor-Lagrange, $f^{(n+1)}(a+\alpha h)$ n'est définie que si f est $n+1$ fois dérivable ;

— dans la formule de Taylor-Young, le dernier terme du développement n'a de sens que si f est dérivable en a.

De plus, dans cette série de trois théorèmes, les hypothèses sont de plus en plus faibles, ce qui fait que les conclusions sont également de plus en plus faibles.

Corollaire 4.5.8. *Une fonction n fois dérivable en un point a admet un développement limité à l'ordre n au point a.*

Quelques remarques :

— La réciproque du corollaire 4.5.8 est *fausse* ! Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une fonction f continue mais non dérivable, vérifiant $f(0) = 0$ (note 6). On pose ensuite $f_n(x) = x^n f(x)$. Comme f est continue en 0 avec $f(0) = 0$, on a $f_n(x) = o(x^n)$ en 0. Cependant, si $n \geq 2$, la fonction f_n n'est dérivable qu'au point $x = 0$.

— Toutefois, une partie de la réciproque pour $n = 1$ est vraie. En effet, le développement limité à l'ordre 1, $f(x+h) = f(x) + h\lambda + o(h)$ revient exactement à la définition de la dérivabilité de f en x avec $f'(x) = \lambda$. En fait ce qui empêche de passer à n supérieur à 1 est le fait qu'un développement limité donne de l'information sur la fonction (par exemple si elle est dérivable), mais pas sur ses dérivées (par exemple il n'indique pas que la dérivée est dérivable).

(note 6). On a admis l'existence de telles fonctions, voir la propriété 4.3.3

4.6 Exercices

Exercice 4.1.
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - x},\ g(x) = \frac{1}{x^2 + 2\cos(\theta)x + 1},\ h(x) = \cos(2x)e^x \text{ et } k(x) = \sin(x)e^{2x}(x^2 - x).$$

Exercice 4.2.
Déterminer la droite asymptote en $x = \infty$ des fonction suivantes, et préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote :

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{1 - x^2},\ \frac{\sqrt{x^5 + x^3 + x - 1}}{\sqrt{x^3 - x}},\ x^2\ln(x) - x^2\ln(1 + x).$$

Exercice 4.3.
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$$\frac{\ln(1 + x)}{\cos(x)},\ \sin(e^x - 1),\ \tan(x),\ \frac{\ln(\cos(x))}{x},\ (\cos(x))^{\sin(x)}.$$

Exercice 4.4.
Trouver de trois manières différentes le développement limité à l'ordre 5 de la fonction tan. On pourra utiliser la définition de la fonction tan, utiliser l'expression de sa dérivée, où encore inverser la fonction arctan.

Exercice 4.5.
Donner les limites en $x = 0$ des expressions suivantes :

$$\frac{\ln(1 + 2x) - \sin(x)}{e^{3x} - 1},\ \frac{e^x - \cos(2x)}{\tan(2x) - \sin(x)},\ \frac{\sqrt{x^2 + x^3} - x - x^2/2}{\ln(1 + x) - \sin(x - x^2/2)},\ \frac{\cos(x)^x - 1}{\sin(x) - x} - 1,\ x^{\sin(x)},\ \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 4.6.
Montrer que la fonction $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ peut se prolonger par continuité en 0. Le prolongement est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4.7.
Trouver la limite en $x = 0$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x))}{\arctan(\arcsin(x)) - \arcsin(\arctan(x))}$$

(cet exercice peut se faire sans trop de calculs *si on s'y prend bien*).

Exercice 4.8.
Soit $\alpha > 0$ et $u_0 \neq 0$ deux réels. Montrer que la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - \alpha}{2u_n} = \frac{u_n}{2} + \frac{\alpha}{2u_n}$$

définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite. Donner une majoration de $u_n - \lim_k u_k$ quand n tend vers l'infini (éventuellement en supposant $|u_0 - \lim_n u_n|$ assez petit).

Exercice 4.9.
Soit n un entier supérieur ou égal à trois. Montrer que l'équation $e^x = nx$ a deux solutions réelles $a_n < b_n$. Quel sont les comportements asymptotiques de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 4.10.
Caractériser les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Et si on suppose seulement f continue en 0 ? Même question pour les équations

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ f(xy) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y)$$

(pour les deux dernières, on prendra f de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et on considérera le point 1 plutôt que 0).

Exercice 4.11.
Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en aucun point ; en un seul point. Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ est un rationnel (écrit sous forme de fraction irréductible)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais en aucun point de $\mathbb{Q}$.

Exercice 4.12.
Soit f une fonction k-Lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $k < 1$.

1. On définit, pour x_0 un réel donné, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ;
2. En déduire qu'il existe un unique réel x tel que $f(x) = x$;
3. La conclusion précédente est elle toujours valide si f va de I dans I, où I est un intervalle ouvert ? fermé ?

Exercice 4.13.
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe x^2 est continue mais pas uniformément continue. Montrer que la fontion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\sqrt{x}$ est uniformément continue, mais pas Lipschitzienne.

Exercice 4.14.
Montrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors on peut trouver deux constantes réelles a et b telles que $|f(x)| \leq a|x| + b$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4.15.
Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si il existe une fonction ω de $[0,\infty[$ dans $[0,\infty[$ telle que $\lim_{t\to 0} \omega(t) = 0$ et que pour tous réels x, y, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|).$$

Retrouver à partir de cela le fait que les fonctions Lipschitziennes sont uniformément continues.

Exercice 4.16.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$. Est-elle dérivable ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4.17.
Montrer que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 4.18.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout x de $[a, b]$,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Exercice 4.19.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. Montrer que l'on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2 \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| \right)^{\frac{1}{2}}$$

(on pourra commencer par montrer $|f'(x)| \leq h \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \frac{1}{h} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$ quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).

Exercice 4.20.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé (sur $\mathbb{R}$). Montrer que P' est également scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont comprises entre la plus petite et la plus grande racine de P. Montrer que si les racines de P sont distinctes, alors les racines de P' le sont aussi.

Exercice 4.21.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle en 0. Quelle est la limite de

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) ?$$

Et celle de

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) ?$$

Exercice 4.22.
Soit f une fonction dérivable en tout point de $[0, 1]$. On suppose $f'(0) < f'(1)$. Pour α un élément de $]f'(0), f'(1)[$ et $x \in [0, 1]$, on pose $g_\alpha(x) = f(x) - \alpha x$. Montrer que g_α est continue sur $[0, 1]$ et que son minimum n'est atteint ni en 0 ni en 1. En déduire que la fonction f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 4.23.
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $[0, \infty[$ telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$. Montrer que f est majorée et atteint sa borne supérieure.

Chapitre 5

Intégration

5.1 Intégration sur un segment

Il existe plusieurs théories de l'intégration, permettant de donner un sens à l'intégrale des fonctions appartenant à une certaine catégorie de fonctions, plus ou moins vaste selon la théorie utilisée. La théorie de l'intégration que nous présenterons ici la théorie de l'intégration *au sens de Riemann*. Nous allons revenir sur la construction de cette intégrale.

La notion d'intégrale a pour objectif d'associer à une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ un nombre, noté $\int_a^b f(x)dx$, qui correspondrait à la "taille" de cette fonction. On peut notamment penser à la surface présente sous le graphe de la fonction. Idéalement, on voudrait que cette notion ait un sens pour la plus grande classe de fonctions possibles.

On s'attend à ce que l'intégrale vérifie les propriétés "évidentes" suivantes :

(croissance) Si f et g sont deux fonctions ayant une intégrale et telles que $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(linéarité) Si f et g sont deux fonctions admettant une intégrale et λ et μ sont deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ admet une intégrale qui vaut

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

(cas des fonctions élémentaires) Si α et β sont des éléments de $[a, b]$ avec $\alpha \leq \beta$, alors la fonction $\mathbf{1}_{(\alpha,\beta)}$ (note 1), (note 2), a une intégrale, donnée par

$$\int_a^b \mathbf{1}_{(\alpha,\beta)} = \beta - \alpha.$$

(note 1). Les parenthèses désignent des crochets ouverts ou fermés

(note 2). Pour une partie A de $\mathbb{R}$ la fonction $\mathbf{1}_A$, appelée *indicatrice* de A est définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.

Nous allons maintenant partir de ces trois propriétés élémentaires pour en déduire une notion d'intégrale pouvant s'appliquer à une classe plus grande de fonctions, contenant notamment toutes les fonctions continues sur $[a, b]$.

Définition 5.1.1. — *On appelle* subdivision *d'un segment* $[a, b]$ *une suite finie*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La quantité $\max_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$ *s'appelle le* pas *de la subdivision.*

— *On dit qu'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est* en escalier *si il existe une subdivision $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. On notera $\mathcal{E}([a, b])$ (ou simplement $\mathcal{E}$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés) l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.*

Une fonction en escalier est donc de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1}, x_i[}(x) + \sum_{i=0}^{n} \mu_i \mathbf{1}_{\{x_i\}}(x),$$

avec $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. La propriété de linéarité permet de définir l'intégrale d'une fonction en escalier à partir des intégrales de fonctions élémentaires : en effet, on peut écrire

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_i, x_{i-1}[}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b \mathbf{1}_{]x_i, x_{i-1}[}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}).$$

Noter que les fonctions de la forme $\mathbf{1}_{\{c\}}$ ont une intégrale nulle, on va donc les oublier dans le reste du chapitre.

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. On suppose que la fonction f admet une intégrale. Si v et w sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $v \leq f \leq w$, la propriété de croissance nous donne l'inégalité suivante, illustrée sur la figure 5.1

$$\int_a^b v(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b w(x)dx.$$

En passant à la borne supérieure sur toutes les fonctions v en escalier inférieures à f et à la borne inférieure sur toutes les fonctions w en escalier supérieures à f, on obtient l'encadrement

$$\sup_{v \in \mathcal{E},\ v \leq f} \int_a^b v(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \inf_{w \in \mathcal{E},\ f \leq w} \int_a^b w(x)dx.$$

On est donc amenés naturellement à la définition suivante :

Définition 5.1.2. *On dit qu'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est* intégrable *(au sens de Riemann, ou encore Riemann-intégrable) si les quantités $\sup_{v \in \mathcal{E},\ v \leq f} \int_a^b v(x)dx$ et $\inf_{w \in \mathcal{E},\ f \leq w} \int_a^b w(x)dx$ sont finies et égales. On définit alors l'intégrale de f comme la valeur commune*

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{v \in \mathcal{E},\ v \leq f} \int_a^b v(x)dx = \inf_{w \in \mathcal{E},\ f \leq w} \int_a^b w(x)dx.$$

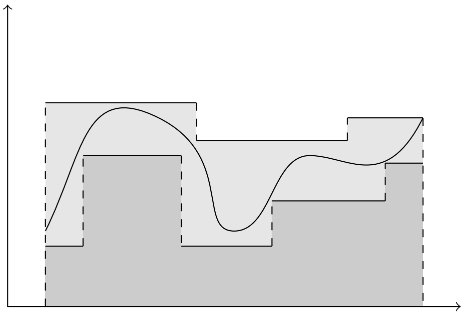

FIGURE 5.1 – Encadrement d'une fonction par des fonctions en escalier. L'aire sous la courbe est encadrée par les deux surfaces grisées.

Le principe de cette définition est le suivant : on sait intégrer les fonctions en escalier, dont les graphes ne sont que des réunions de rectangles, la propriété de croissance de l'intégrale permet donc d'encadrer l'hypothétique intégrale d'une fonction f par les bornes inférieures et supérieures de la définition 5.1.2. Quand ces deux bornes sont égales, l'intégrale de la fonction, si elle existe, *ne peut pas* valoir autre chose que la valeur commune de ces deux bornes. On *définit* donc l'intégrale de f de cette manière.

Il existe des fonctions bornées qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann. L'exemple le plus simple est la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ qui vaut 1 sur l'ensemble des rationnels et 0 en dehors. Montrons que cette fonction n'est pas intégrable sur le segment $[0,1]$ (pour fixer les idées). Tout d'abord, on a un encadrement de la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ donné par $0 \leq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \leq 1$ sur le segment $[0,1]$, de sorte qu'on a les inégalités

$$\sup_{v\in\mathcal{E},\ v\leq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}} \int_0^1 v(x)dx \geq 0 \text{ et } \inf_{w\in\mathcal{E},\ \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\leq w} \int_0^1 w(x)dx \leq 1. \tag{5.1}$$

De plus, si v une fonction en escalier avec $v \leq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, en écrivant $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{[t_{i-1},t_i[}$, avec $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, on voit que l'on a nécessairement $\lambda_i \leq 0$, de sorte que $\int_0^1 v(x)dx \leq 0$. En passant à la borne supérieure et en utilisant (5.1), on obtient $\sup_{v\in\mathcal{E},\ v\leq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}} \int_0^1 v(x)dx = 0$. De même, on aurait $\inf_{w\in\mathcal{E},\ \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\leq w} \int_0^1 w(x)dx = 1$. Les bornes supérieures et inférieures de la définition 5.1.2 ne sont pas égales dans le cas de la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, ce qui signifie que cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann.

En utilisant le fait que les bornes inférieures et supérieures de la définition 5.1.2 peuvent être approchée à ε près pour tout $\varepsilon > 0$, on peut reformuler la définition 5.1.2 de la manière suivante :

Propriété 5.1.3. *Une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions v et w en escalier sur $[a,b]$ satisfaisant $u \leq f \leq w$ et*

$$0 \leq \int_a^b (w(x) - u(x))dx \leq \varepsilon. \tag{5.2}$$

On utilise également la convention suivante, de sorte que la relation de Chasles soit vérifiée :

Définition 5.1.4. *Si $b \leq a$ et si f est une fonction intégrable sur $[b, a]$ on* définit

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Cette convention donne la propriété suivante :

Propriété 5.1.5 (Propriété de Chasles)**.** *Si a, b et c sont trois réels et si f est fonction intégrable définie sur un segment I contenant a, b et c, alors*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Démonstration. Supposons que $a \leq b \leq c$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= \int_a^c \mathbf{1}_{[a,b]}(x)f(x)dx + \int_a^c \mathbf{1}_{]b,c]}(x)f(x)dx \\ &= \int_a^c (\mathbf{1}_{[a,b]}(x) + \mathbf{1}_{]b,c]}(x))f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx.\end{aligned}$$

Si $a \leq c \leq b$ on fait un calcul similaire en utilisant la convention de la définition 5.1.4 et en remarquant que $\mathbf{1}_{[a,b]}(x) - \mathbf{1}_{[c,b]}(x) = \mathbf{1}_{[a,c[}(x)$. Les autres cas se traitent de manière similaire. □

Propriété 5.1.6. *Une fonction intégrable au sens de Riemann sur un segment $[a, b]$ est bornée.*

Démonstration. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a, b]$. Par définition, les quantités $\inf_{v \leq f} \int_a^b v(x)dx$ et $\sup_{f \leq w} \int_a^b w(x)dx$ sont finies. Notamment, l'ensemble des fonctions en escalier v et w telles que $v \leq f \leq w$ est non vide. Or, une fonction en escalier sur un segment est bornée, de sorte que $\inf v \leq f \leq \sup w$, et la fonction f est bornée. □

Dans la pratique, on se limitera à un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions intégrables, plus simple à caractériser, qui contient les fonctions continues. Il s'agit de l'ensemble des fonctions *continues par morceaux*, défini ci-dessous.

Définition 5.1.7. *On dit qu'une fonction définie sur un segment $[a, b]$ est* continue par morceaux *si il existe une subdivision $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ de $[a, b]$ telle que $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ soit continue et admette des limites en x_i^+ et en x_{i+1}^-.*

Propriété 5.1.8. *Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est intégrable.*

Démonstration. Il suffit en fait de traiter le cas où la fonction est *continue*. En effet, si est f une fonction continue par morceaux relativement à la subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, il suffit de considérer successivement chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ pour se ramener à des fonctions continues.

On considère donc une fonction f continue sur $[a, b]$. D'après la propriété 4.2.7 il existe une fonction en escalier g_ε telle que pour tout $x \in [a, b]$

$$g_\varepsilon(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq g_\varepsilon(x) + \varepsilon.$$

Les fonctions $v_\varepsilon = g_\varepsilon - \varepsilon$ et $w_\varepsilon = g_\varepsilon + \varepsilon$ sont alors deux fonctions en escaliers encadrant f. On a donc

$$0 \leq \inf_{w \in \mathcal{E},\ f \leq w} \int_a^b w(x)dx - \sup_{v \in \mathcal{E},\ v \leq f} \int_a^b v(x)dx \leq \int_a^b w_\varepsilon(x)dx - \int_a^b v_\varepsilon(x)dx = 2(b-a)\varepsilon.$$

Cet encadrement étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\inf_{w \in \mathcal{E},\ f \leq w} \int_a^b w(x)dx - \sup_{v \in \mathcal{E},\ v \leq f} \int_a^b v(x)dx = 0,$$

et la fonction f est donc intégrable. □

Nous allons maintenant voir une manière plus explicite de calculer l'intégrale.

Définition 5.1.9. *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, et $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle* somme de Riemann *associée à la subdivision $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ toute somme de la forme*

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

où c_i est un élément de $[x_{i-1}, x_i]$.

On a la caractérisation suivante des fonctions intégrables.

Propriété 5.1.10. *Une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est intégrable si et seulement si les sommes de Riemann associées aux subdivisions de $[a, b]$ convergent quand le pas de la subdivision tend vers 0.*

Plus précisément f est intégrable si et seulement la proposition suivante est vraie :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x_i)_{i=0,\dots,n} \text{ subdivision},\ \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i],$$
$$\left(\max_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| < \eta\right) \Rightarrow \left(\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \lambda\right| \leq \varepsilon\right).$$

Le réel λ est alors nécessairement égal à $\int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. Pour montrer le sens direct, on va d'abord raisonner sur les fonctions en escalier. Si u est une fonction en escalier et si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, est une subdivision de $[a, b]$, alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b u(x)dx\right| \leq M \times \left(\sup_{[a,b]} u - \inf_{[a,b]} u\right) \times \max_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|,$$

où M est le nombre de discontinuités de la fonction u. Par conséquent, quand le pas de la subdivision tend vers 0, la quantité $\sum_{i=1}^{n} u(c_i)(x_i - x_{i-1})$ converge vers $\int_a^b u(x)dx$. Pour une fonction f intégrable sur $[a,b]$ quelconque, pour $\varepsilon > 0$, il existe par définition deux fonctions en escalier v et w avec $v \leq f \leq w$ et $0 \leq \int_a^b w(x) - v(x)dx \leq \varepsilon$. On a donc l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} v(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} w(c_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{5.3}$$

Comme les fonction v et w sont en escalier, le membre de droite de (5.3) converge, quand le pas de la subdivision tend vers 0, vers $\int_a^b w(x)dx$ qui est inférieur à $\int_a^b f(x)dx + \varepsilon$ et le membre de gauche vers $\int_a^b v(x)dx$ qui est supérieur à $\int_a^b f(x)dx - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout ε, la quantité $\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ converge bien vers $\int_a^b f(x)dx$.

Inversement, supposons que f est une fonction définie sur $[a,b]$ telle que les sommes de Riemann convergent vers un réel λ quand le pas de la subdivision tend vers 0, et soit ε un réel positif. Considérons le réel η tel que les subdivisions de pas $< \eta$ conduisent à des sommes de Riemann valant λ à $\frac{\varepsilon}{2}$ près. Considérons alors une subdivision $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ de pas $< \eta$, et définissons deux fonctions en escalier v et w par

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{[x_{i-1},x_i[} f(x) \right) \mathbf{1}_{[x_{i-1},x_i[} \text{ et } w(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1},x_i[} f(x) \right) \mathbf{1}_{[x_{i-1},x_i[}$$

On a alors $v \leq f \leq w$ et

$$\begin{aligned} \int_0^1 w(x) - v(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1},x_i[} f(x) - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq (\lambda + \varepsilon/2) - (\lambda - \varepsilon/2) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Par la propriété 5.1.3, cela montre que la fonction f est intégrable au sens de Riemann.

□

En pratique, la propriété 5.1.10 est surtout utilisée dans le cas où la subdivision utilisée est la subdivision uniforme $(u_i^{[a,b],n})_{i\in\{0,\dots,n\}}$ sur $[a,b]$ définie par

$$u_i^{[a,b],n} = \frac{(n-i)}{n}a + \frac{i}{n}b.$$

Le pas de cette subdivision vaut $\frac{b-a}{n}$, ce qui tend bien vers 0. On obtient donc le résultat suivant :

Corollaire 5.1.11. *Si f est une fonction Riemann intégrable sur le segment $[a,b]$, alors on a*

$$\lim_n \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{(n-i)}{n}a + \frac{i}{n}b \right) = \int_a^b f(x)dx$$

Deux inégalités utiles pour encadrer des intégrales :

Propriété 5.1.12 (Inégalité de la moyenne et inégalité triangulaire)**.** *Si f et g sont deux fonctions inégrables sur un segment $[a,b]$, alors on a l'*inégalité triangulaire

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

*ainsi que l'*inégalité de la moyenne

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sup_{[a,b]}|g| \int_a^b |f(x)|dx.$$

Démonstration. On a, par définition de la valeur absolue, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. La propriété de croissance de l'intégrale nous donne alors

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

ce qui donne la première inégalité.

Pour la deuxième, on remarque que

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq |f(x)| \sup_{[a,b]}|g|$$

et on intègre par rapport à x. □

Propriété 5.1.13. *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur un segment $[a,b]$, alors la fonction fg est elle aussi intégrable sur $[a,b]$.*

Attention : ce résultat est valide pour des fonctions intégrables sur un *segment*, mais ne le sera plus dans le cas des fonctions définies sur un intervalle quelconque.

Démonstration. En écrivant $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$, on voit qu'il suffit de montrer que le carré d'une fonction intégrable sur $[a,b]$.

On considère donc une fonction f intégrable sur un segment $[a,b]$. Supposons tout d'abord f positive, on peut encadrer f par deux fonctions en escalier v et w telles que $0 \leq v \leq f \leq w \leq \sup f$ et telle que $\int_a^b w(x) - v(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2\sup f}$. On a alors $v^2 \leq f^2 \leq w^2$, où les deux fonction v^2 et w^2 sont en escalier et vérifient

$$\int_a^b w^2(x) - v^2(x)dx = \int_a^b (w(x) - v(x))(w(x) + v(x))dx \leq \sup(w+v)\frac{\varepsilon}{2\sup f} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que f^2 est intégrable. Si maintenant f est de signe quelconque, alors comme f est bornée, il existe une constante c telle que $f+c$ soit positive. On a alors $f^2 = (f+c-c)^2 = (f+c)^2 - 2cf + c^2$. La fonction $f+c$ étant positive, on peut lui appliquer le raisonnement précédent, de sorte que $(f+c)^2$ est intégrable. De plus, $-2cf + c^2$ est intégrable, ce qui fait que f^2 est intégrable comme somme de fonctions intégrables. □

Propriété 5.1.14 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur un segment $[a,b]$, alors*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2dx \int_a^b |g(x)|^2dx} \tag{5.4}$$

Dans l'inégalité (5.4), tous les termes sont bien définis en vertu de la propriété 5.1.13.

Démonstration. On considère le polynôme de degré 2 suivant :

$$\begin{aligned}
P(X) &= \int_a^b (Xf(x) + g(x))^2 dx \\
&= \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) X^2 + 2 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) X + \int_a^b |g(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

La première expression de P montre qu'il ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, et notamment que son discriminant est négatif. D'après la deuxième expression, ce discriminant vaut

$$\Delta = 4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

L'inégalité $\Delta \leq 0$ correspond alors exactement à l'inégalité à démontrer. □

On peut également définir l'intégrale de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$, ou même dans un espace vectoriel réel de dimension *finie* quelconque. Il suffit pour cela de travailler coordonnée par coordonnée : on considère une fonction f à valeurs un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie et on écrit $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i$ où $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une base de E. On définit alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)dx \right) e_i \in E,$$

on est donc ramené à des intégrales de fonctions à valeurs réelles. Toutes les résultats ci-dessus restent alors vrais, pour peu que l'on remplace la valeur absolue par une norme sur E.

Concluons cette partie avec un résultat permettant d'affirmer dans certains cas que $\lim_n \int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_n f_n(x)dx$. Remarquons que ces quantités peuvent très bien être distinctes : si $I = [0,1]$ et $f_n(x) = n\mathbf{1}_{]0,1/n]}$ le membre de gauche vaut 1 alors que le membre de droite vaut 0.

Propriété 5.1.15. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions Riemann-intégrable sur un* segment $[a,b]$. *On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f Riemann-intégrable. Alors on a*

$$\lim_n \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

En particulier

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. On écrit

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

□

5.2 Lien entre intégrale et primitive

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I admet une *primitive* F si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I.

On a la propriété suivante :

Propriété 5.2.1. *Soit f une fonction intégrable sur un segment $[a, b]$. Soit c un point de $[a, b]$. On pose $F_c(x) = \int_c^x f(y)dy$. On a les résultats suivants :*

1. *la fonction F_c est continue ;*
2. *si f est continue en x, alors F_c est dérivable en x et vérifie $F_c'(x) = f(x)$;*
3. *si f est continue sur $[a, b]$, alors F_c est de classe $\mathcal{C}^1$ et est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en c. Notamment, pour tout primitive F de f, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. 1. Comme f est intégrable sur le segment $[a, b]$, la propriété 5.1.6 montrer qu'elle est bornée par une constante M. On peut alors écrire

$$|F_c(x) - F_c(y)| = \left|\int_x^y f(x)dx\right| \leq \left|\int_x^y |f(x)|dx\right| \leq \left|\int_x^y M dx\right| = M|x - y|.$$

La fonction F_c est donc Lipschitzienne, et par conséquent continue.

2. On va montrer que le taux d'accroissement de F_c en un point x_0 où f est continue tend vers $f(x_0)$. Soit ε un réel positif, et soit η tel que

$$|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt.\end{aligned}$$

Si $|x - x_0| \leq \eta$, pour tout t dans $[x_0, x]$ (note 3) on a $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, de sorte que

$$\left|\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Cela montre que F_c est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$.

(note 3). ou $[x, x_0]$ suivant les cas.

3. Si f est continue en tout point de $[a, b]$, alors F_c est, d'après le point précédent, dérivable sur $[a, b]$ et $F_c' = f$ est une fonction continue. L'unicité de la primitive a constante près a été vue dans le corollaire 4.3.11. Enfin, si F et une primitive de f, on a, par la propriété de Chasles
$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = F_c(b) - F_c(a) = F(b) - F(a),$$
où la dernière égalité vient du fait que la fonction $F_c - F$ est constante (d'où $F_c(b) - F(b) = F_c(a) - F(a)$).

□

Corollaire 5.2.2. *Toute fonction continue admet une primitive.*

Démonstration. Si f est une fonction continue définie sur un intervalle I, alors si a est un élément de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(y)dy$ est bien une primitive de f. □

On déduit de cette propriété les deux règles de calculs suivantes, très importantes pour le calcul d'intégrales.

Propriété 5.2.3 (Intégration par parties)**.** *Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on a l'égalité*
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Démonstration. La fonction uv est de classe $\mathcal{C}^1$, on a donc notamment
$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

□

Propriété 5.2.4. *Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et si f est continue sur $\varphi([a, b])$* (note 4)*, alors on a*
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Un moyen mnémotechnique simple pour retrouver cette formule est d'imaginer qu'on a posé $y = \varphi(x)$, de sorte que $dy = \varphi'(x)dx$, que $f(y) = f(\varphi(x))$ et que si x varie de a à b, alors y varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Démonstration. Soit F une primitive de f (une telle fonction existe, puisque f est continue). On a alors, puisque $(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$,
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

□

(note 4). Qui est un segment, par les théorèmes 4.2.1 (valeurs intermédiaires) et 4.2.6 (de Heine).

Dans la plupart des cas, les changements de variables utilisés sont bijectifs : φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $[\varphi(a), \varphi(b)]$ (note 5) et on peut alors écrire la formule de changement de variables sous la forme

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

5.3 Intégration approchée

Il est utile de pouvoir donner des valeurs approchées à une intégrale que l'on ne sait pas déterminer explicitement.

On va présenter deux méthodes simples pour ce faire. L'idée de base est que l'intégrale d'une fonction sur un segment peut être approchée par la longueur du segment multipliée par la valeur de la fonction en un point du segment. On va voir que le choix de ce point à une importance.

5.3.1 La méthode des rectangles à gauche

La méthodes rectangles à gauche consiste à utiliser l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(a). \tag{5.5}$$

On remarque que cette approximation est exacte si la fonction f est constante. Pour estimer l'erreur commise dans le calcul de cette intégrale, on va donc mesurer à quel point la fonction f est proche de la constante $f(a)$. Ceci est formulé dans le résultat suivant :

Lemme 5.3.1. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, alors on a*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{[a,b]} |f'|.$$

Démonstration. La formule de Taylor-Lagrange appliqué à f en a nous donne la majoration suivante :

$$|f(x) - f(a)| \leq (x-a) \sup_{[a,b]} |f'|.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a) \right| = \left| \int_a^b (f(x) - f(a))dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) - f(a)|dx \\ &\leq \int_a^b (x-a)dx \sup_{[a,b]} |f'| \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{[a,b]} |f'|.\end{aligned}$$

□

(note 5). ou $[\varphi(b), \varphi(a)]$.

En revanche, la quantité $\frac{(b-a)^2}{2} \sup_{[a,b]} |f'|$ n'a aucune raison d'être petite. Pour que l'intégrale approchée soit proche de la vraie valeur, une méthode est de subdiviser l'intervalle en N sous-intervalles plus petits, et d'appliquer la méthode des rectangles à chacun des sous-intervalles.

Plus précisément, on a le résultat :

Propriété 5.3.2. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors on a*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2N} \sup_{[a,b]} |f'|.$$

L'approximation utilisée dans la propriété 5.3.2 est illustrée sur la figure 5.2.

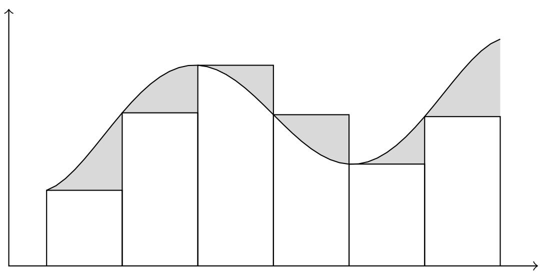

FIGURE 5.2 – La méthode des rectangles à gauche pour le calcul approché d'intégrales. La surface grisée majore l'erreur commise.

Démonstration. En appliquant le lemme 5.3.1 à la fonction f sur l'intervalle $[a+(b-a)\frac{k}{N}, a+(b-a)\frac{k+1}{N}]$, on obtient la majoration

$$\left| \int_{a+k\frac{b-a}{N}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{N}} f(x)dx - \frac{b-a}{N} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2N^2} \sup_{[a,b]} |f'|.$$

En sommant de $k=0$ à $N-1$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{N}\right) \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{a+k\frac{b-a}{N}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{N}} f(x)dx - \frac{b-a}{N} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) \right| \\ &\leq N\frac{(b-a)^2}{2N^2} \sup_{[a,b]} |f'| \\ &= \frac{(b-a)^2}{2N} \sup_{[a,b]} |f'|. \end{aligned}$$

□

On peut aussi parler d'une méthode des rectangles à droite, pour laquelle les mêmes résultats sont valides, en remplaçant l'approximation (5.5) par

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(b).$$

5.3.2 La méthode du point milieu

Dans cette partie, on va utiliser la même méthode qu'à la partie précédente, mais en évaluant la fonction au *milieu* de l'intervalle et non pas en son bord. Autrement dit on utilise l'approximation

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

On pourrait croire que l'erreur d'approximation sera sensiblement la même que pour la méthode des rectangles à gauche. On va voir qu'il n'en est rien.

La différence vient du fait que la méthode du point milieu est exacte non seulement pour les fonctions constantes, mais aussi pour les fonctions *affines*. Ceci se voit sur la figure 5.3. L'intégrale approchée par la méthode du point milieu correspond à l'aire situé sous le graphe de la fonction en escalier, mais cette aire est *égale* à l'aire située sous le graphe de la fonction affine par morceaux.

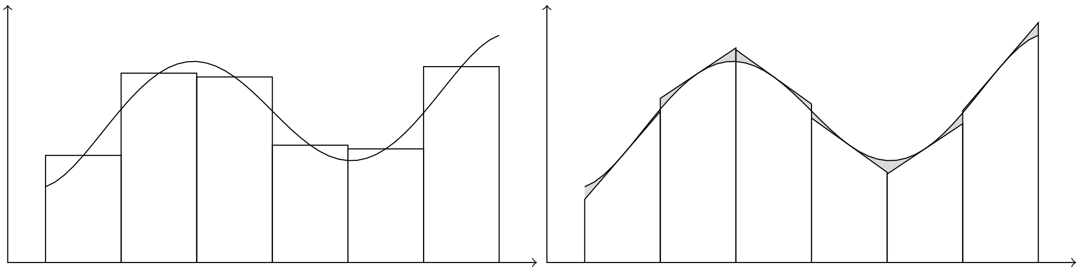

FIGURE 5.3 – La méthode du point milieu pour le calcul approché d'intégrales. L'intégrale de la fonction en escalier à gauche est égale à l'intégrale de la fonction affine par morceaux à droite. Par conséquent, l'erreur commise dans la méthode du point milieu est majorée par la surface grisée

Lemme 5.3.3. *Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On a la majoration :*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24}\sup_{[a,b]}|f''|.$$

Démonstration. La formule de Taylor-Lagrange appliquée à f sur $[a,b]$ nous donne

$$\left|f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \sup_{[a,b]}|f''|.$$

La conclusion vient du même calcul que pour le lemme 5.3.1, en utilisant les identités

$$\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

et

$$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

□

Comme précédemment, on déduit, en subdivisant l'intervalle $[a, b]$:

Propriété 5.3.4. *Soit $N \geq 1$ et f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. On a*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{N}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24N^2} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

On voit que dans le cas de la méthode du point milieu, l'erreur est de l'ordre de $\mathcal{O}(N^{-2})$, ce qui est bien meilleur que dans le cas de la méthode des rectangle, où l'erreur est en $\mathcal{O}(N^{-1})$.

5.4 Intégration sur un intervalle quelconque

On peut légitimement se poser la question de définir l'intégrale de fonctions définies sur un intervalle quelconque plutôt que de se limiter à des segment. Sur un intervalle ouvert (dont une des bornes peut désormais valoir $\pm\infty$) on peut observer différents problèmes qui ne se posaient pas sur un segment. En effet, la définition naturelle de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque I (qui généralise notamment les fonctions continues) est la suivante, pour laquelle une fonction continue par morceaux peut très bien tendre vers $\pm\infty$ à une des bornes.

Définition 5.4.1. *On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I (non nécessairement fermé) est* continue par morceaux *si elle est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I.*

Ainsi, on se convaincra sans peine qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle ne peut pas nécessairement être encadrée par des fonctions en escalier intégrables, de sorte que sur un intervalle ouvert, on va pouvoir trouver des fonctions continues par morceaux qui ne sont pas intégrables au sens de la définition 5.1.2. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, 1]$ ne pourra pas être majorée par une fonction en escalier sur $]0, 1]$.

On va donc considére la définition suivante :

Définition 5.4.2. *Soit f une fonction* positive *définie sur un intervalle I, et telle que f soit Riemann-intégrable sur chaque segment de I. On dira que f est* intégrable *sur I si elle vérifie une des trois propriétés équivalentes suivantes :*

1. $\sup_{J \text{ segment},\ J \subset I} \int_J f(x)dx < \infty$;
2. *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissant vers* $\inf I$ *et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers* $\sup I$ *telles que $\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ existe ;*
3. *pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissant vers* $\inf I$ *et toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers* $\sup I$*, la limite* $\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ *existe.*

On appelle alors intégrale *de f le nombre*

$$\sup_{J \text{ segment},\ J \subset I} \int_J f(x)dx = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx.$$

Il est à noter que les fonctions définies sur un intervalle I quelconque qui sont continues par morceaux au sens de la définition 5.4.1 sont bien intégrables au sens de Riemann sur chaque segment de I.

On peut définir de même l'intégrale d'une fonction de signe quelconque, en passant par la valeur absolue de la fonction.

Définition 5.4.3. *Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est dite* intégrable *si $|f|$ est intégrable sur I (au sens de la définition précédente). On dit aussi que l'intégrale* converge. *Dans ce cas, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$, alors la limite $\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ existe et ne dépend pas du choix des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx.$$

On peut ramener l'étude de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle à l'étude de l'intégrabilité aux bornes de cet intervalle :

Propriété 5.4.4. *Soit I un intervalle, soient a et b deux réels avec $\inf I < a < b < \sup I$ et f une fonction Riemann-intégrable sur tout segment de I. Alors f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $]\inf I, a]$ et sur $[b, \sup I[$.*

Démonstration. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$. On écrit alors

$$\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|dx = \int_{a_n}^{a} |f(x)|dx + \int_a^b |f(x)|dx + \int_b^{b_n} |f(x)|dx.$$

Quand n tend vers l'infini, le membre de gauche converge si et seulement si f est intégrable sur I, et le membre de droite converge si et seulement si f est intégrable sur $]\inf I, a]$ et $[b, \sup I[$. Cela montre le résultat. □

L'inégalité triangulaire est toujours vraie pour les intégrales sur un intervalle quelconque, de même que la linéarité.

Propriété 5.4.5. *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I. Alors*

$$\left|\int_I f(x)dx\right| \le \int_I |f(x)|dx.$$

Démonstration. Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de I tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$, on écrit $\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx\right| \le \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\, dx$, puis on fait tendre n vers ∞. □

Propriété 5.4.6. *Soit I un intervalle et f et g deux fonctions intégrables sur I. Si λ et μ sont deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I et on a*

$$\int_I \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_I f(x)dx + \mu \int_I g(x)dx.$$

Démonstration. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de I tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$. On écrit $\int_{a_n}^{b_n} |\lambda f(x) + \mu g(x)|\, dx \le \lambda \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|dx + \mu \int_{a_n}^{b_n} |g(x)|dx$. En faisant tendre n vers ∞, on voit que $\lambda f + \mu g$ est intégrable.

L'égalité des intégrales s'obtient en passant à la limite dans $\int_{a_n}^{b_n} \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx + \mu \int_{a_n}^{b_n} g(x)dx$. □

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de l'intégrale d'une fonction au voisinage d'une borne de l'intervalle d'intégration. Le théorème suivant est tout à fait analogue à ce qui a été fait pour les séries.

Théorème 5.4.7. *Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur tous les segments d'un intervalle $[a,b[$* (note 6) avec g positive.
- *Si g n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et si $f(x)=o(g(x))$ (respectivement $f(x)=\mathcal{O}(g(x))$, $f(x)\sim g(x)$) au voisinage de b alors on a*
$$\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)\ \left(\textit{resp.}\ \int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right),\ \int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt\right),$$
au voisinage de b.
- *Si g est intégrable sur $[a,b[$ et si $f(x)=o(g(x))$ (respectivement $f(x)=\mathcal{O}(g(x))$, $f(x)\sim g(x)$) au voisinage de b alors f est intégrable sur $[a,b[$ et on a*
$$\int_x^b f(t)dt = o\left(\int_x^b g(t)dt\right)\ \left(\textit{resp.}\ \int_x^b f(t)dt = O\left(\int_x^b g(t)dt\right),\ \int_x^b f(t)dt \sim \int_x^b g(t)dt\right),$$
au voisinage de b.

Ce théorème permet notamment d'étudier l'intégrabilité d'une fonction en se ramenant à des fonctions équivalentes dont on connaît l'intégrabilité.

Démonstration. On ne traite que le cas g non-intégrable en b et $f=o(g)$, les autres cas se traitant de manière similaire.

Soit $\varepsilon>0$. Comme $f=o(g)$ au voisinage de b, il existe un élément x_0 de $[a,b[$ tel que si $x\in[x_0,b[$ alors, $|f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}g(x)$. On a donc pour $x>x_0$
$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \le \left|\int_a^{x_0} f(t)dt\right| + \int_{x_0}^x |f(t)|dt \le \left|\int_a^{x_0} f(t)dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^x g(t)dt \le \left|\int_a^{x_0} f(t)dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)dt.$$
Comme g n'est pas intégrable en b, $\int_a^x g(t)dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b, et il existe un x_1 dans $[a,b[$ tel que si $x>x_1$, alors
$$\left|\int_a^{x_0} f(t)dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)dt.$$
Finalement, on a, pour $x\ge\max(x_1,x_2)$
$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \le \varepsilon\int_a^x g(t)dt,$$
ce qui montre que $\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$. □

Beaucoup de fonctions usuelles ont un comportement équivalent à une puissance de x au voisinage des bornes d'intégration. Il est donc utile de savoir pour quelles valeur de α la fonction $x\mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,\infty[$.

(note 6). Le même résultat est bien entendu vrai pour des intervalles de la forme $]a,b]$ si l'on fait les substitutions adéquates.

Propriété 5.4.8. *Soit α un réel quelconque. Alors :*
- *La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > -1$.*
- *La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $[1,\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.*

Démonstration. Pour tout $x > 0$, on a $x^\alpha > 0$, il suffit donc d'étudier le comportement asymptotique des suites

$$\int_{1/n}^{1} x^\alpha dx \text{ et } \int_1^n x^\alpha dx.$$

On a pour $\alpha = -1$

$$\int_{1/n}^{1} x^\alpha dx = [\ln(x)]_{1/n}^1 = \ln(n) \to \infty \quad \text{et} \quad \int_1^n x^\alpha dx = [\ln(x)]_1^n = \ln(n) \to \infty.$$

Par conséquent, pour $\alpha = -1$, x^α n'est intégrable ni sur $]0,1]$ ni sur $[1,\infty[$. Pour $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_{1/n}^{1} x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{1/n}^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} \quad \text{et} \quad \int_1^n x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

On doit donc différencier selon le signe de $\alpha+1$. On observe alors que $\int_{1/n}^1 x^\alpha dx$ a une limite finie si et seulement si $\alpha > -1$ et que $\int_1^n x^\alpha dx$ a une limite finie si et seulement si $\alpha < -1$. □

Les autres comportement classiques à la limite d'un intervalle sont les comportement logarithmiques et exponentiels.

Propriété 5.4.9. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \ln^\alpha(x)$ est intégrable sur $]0,1/2]$ mais pas sur $[2,\infty[$.*
La fonction $e^{\lambda x}$ est intégrable sur $[0,\infty[$ si et seulement si $\lambda < 0$.

Démonstration. On sait que $\frac{1}{x} = o(\ln^\alpha(x))$ en $+\infty$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, par le théorème 2.4.4. Or $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[2,\infty[$, donc $\ln^\alpha$ non plus.

On sait également que $\ln^\alpha(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1/2]$, la fonction $\ln^\alpha$ l'est donc aussi.

Pour la fonction exponentielle, un calcul donne, pour $\lambda \neq 0$

$$\int_0^n e^{\lambda x} dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_0^n = \frac{1 - e^{\lambda n}}{\lambda}.$$

Si $\lambda > 0$ cette suite diverge, si $\lambda < 0$, elle converge vers $\frac{1}{\lambda}$. Le cas $\lambda = 0$ correspond à une fonction constante, ce qui a déjà été traité dans le cas des fonction puissances. □

Pour finir, remarquons que la formule d'intégration par parties *n'est pas valable* sur un intervalle quelconque, car la fonction obtenue peut être non intégrable. Par exemple, dans le calcul

$$\int_0^1 \ln x dx = [(1+x)\ln(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1+x)}{x} dx,$$

le membre de gauche est bien défini, alors qu'aucun des deux termes du membre de droite n'a de sens. Pour faire une intégration par parties sur un intervalle quelconque, on devra donc d'abord se ramener à un segment inclus dans l'intervalle, sur lequel la formule d'intégration par parties est rigoureuse, puis on fera tendre les bornes du segment vers celles de l'intégrale. La version rigoureuse du calcul ci-dessus est donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[(1+x)\ln(x)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{(1+x)}{x}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(0-(1+\varepsilon)\ln(\varepsilon)\right) - (0+1-\ln\varepsilon-\varepsilon) \\ &= -1.\end{aligned}$$

5.5 Exercices

Exercice 5.1.
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^a \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx,\quad \int_0^\pi \frac{\sin(x)\cos x}{1+\cos^2 x}dx,\quad \int_0^1 \frac{3x^5+5x^4+2x^3+1}{x^6+2x^5+x^4+2x+3}dx,\quad \int_{-1}^1 (2x+3x^2)\sqrt{1+x^2+x^3}dx,$$

$$\int_1^a \ln(x)dx,\quad \int_0^a \arcsin(x)dx,\quad \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx,\quad \int_0^a x^2\arctan(x)dx,\quad \int_1^2 x\ln(x)dx,\quad \int_0^a \frac{dx}{e^x+e^{-x}},$$

$$\int_0^a \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2},\quad \int_0^a (x^2+1)e^{2x}dx,\quad \int_0^a (x^2+1)\cos x dx,\quad \int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}dx,\quad \int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}dx.$$

Exercice 5.2.
Donner un équivalent des expressions suivantes lorsque n tend vers ∞ ($\alpha > -1$)

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha,\quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k},\quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2},\quad \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}.$$

Exercice 5.3.
Calculer, pour $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$$\int_0^\pi \ln(1-2\cos(x)\alpha+\alpha^2)dx$$

(on pourra utiliser des sommes de Riemann et considérer la factorisation de $X^{2n}-1$ en produits de polynômes réels irréductibles).

Exercice 5.4.
Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^n\right)^{1/n} = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Exercice 5.5.
On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx.$$

2. En déduire une majoration de

$$\left| \frac{1}{2n}(f(0)+f(1)) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \right|.$$

(il s'agit de l'erreur d'approximation dans la méthode des *trapèzes*).

Exercice 5.6.
Soit f une fonction 2π-périodique continue.

1. Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique, on définit le produit de convolution de f par φ par la formule

$$f * \varphi(x) = \int_0^{2\pi} \varphi(x-t)f(t)dt.$$

Montrer que la fonction $f * \varphi$ est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f * \varphi = \varphi * f$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour toute fonction positive φ de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant $\int_0^{2\pi} \varphi(t)dt = 1$ et $\varphi(t) = 0$ si $t \in [\eta, 2\pi - \eta]$ on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - f * \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Exercice 5.7.
Pour chacune des intégrales suivantes, dire si l'intégrale est convergente, et la calculer le cas échéant.

$$\int_0^1 x^\alpha dx,\quad \int_1^\infty x^\alpha dx,\quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)dx,\quad \int_0^\infty 2\arctan(x) - \pi dx,\quad \int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos(x)},$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int_0^\infty e^{-x}dx,\quad \int_0^1 \ln(x)dx,\quad \int_1^\infty \ln(x)dx,\quad \int_1^\infty \frac{dx}{\ln(x)},\quad \int_0^1 \frac{dx}{x\ln(x)}.$$

Exercice 5.8.

1. On considère la suite (I_n) définie par la formule

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt$$

(on appelle les I_n *intégrales de Wallis*).

(a) Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

(b) En déduire un expression générale pour I_n.

(c) Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$. En déduire que

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

(on pourra considérer la suite $(I_n I_{n+1})$).

2. On considère la suite (J_n) définie par

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, \infty[$.

(b) Montrer que J_n converge vers $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

(c) À l'aide d'un changement de variable, donner une relation entre I_n et J_n.

(d) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 5.9.
On considère la fonction

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour n entier ?

Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des suites de fonctions, et plus particulièrement à leur convergence : que signifie converger pour une suite de fonctions, et quelles propriétés sont conservées par les passages à la limite ?

6.1 Convergence d'une suite de fonctions

La notion la plus simple de convergence d'une suite fonctions est la notions suivante.

Définition 6.1.1. *On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$* converge simplement *vers une fonction f si quel que soit le réel x de I, on a la convergence* $\lim_n f_n(x) = f(x)$.

Toutefois, en pratique cette notion est trop faible. Notamment, elle ne préserve pas la notion de continuité. Par exemple la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0,2]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

est une suite de fonctions continues, qui converge simplement vers la limite f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Cette convergence simple est illustrée sur la figure 6.1. On remarque que la fonction limite f n'est pas continue. On a donc besoin d'une notion de convergence des fonctions qui soit plus forte (c'est-à-dire plus restrictive) pour pouvoir déduire de la continuité à la limite. Cette notion est la notion de *convergence uniforme* :

Définition 6.1.2. *On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$* converge uniformément *vers une fonction f si*

$$\lim_n \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

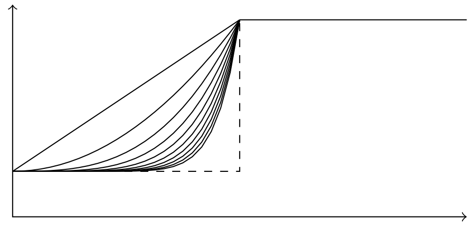

FIGURE 6.1 – Convergence simple de la suite de fonction continue $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une fonction f non continue.

Autrement dit, une suite de fonction converge uniformément si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ *avec une vitesse indépendante de x.*

La convergence uniforme est effectivement une notion plus forte que la notion de converge simple, comme en atteste la propriété suivante.

Propriété 6.1.3. *Si une suite de fonctions converge uniformément, alors elle converge simplement.*

Démonstration. Soit x un réel de I. On a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to_n 0.$$

□

La notion de convergence uniforme est importante en analyse car elle préserve la continuité des fonctions. Plus précisément, on a le résultat :

Propriété 6.1.4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f, alors f est continue.*

Démonstration. Soit ε un réel positif. Par convergence uniforme, il existe un entier n tel que $\sup_I |f_n - f|$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$. La fonction f_n étant continue, il existe un réel $\eta > 0$ tel que si x et y sont deux éléments de I vérifiant $|x - y| \leq \eta$, alors on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On peut alors conclure en remarquant que si $|x - y| \leq \eta$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\sup_I |f_n - f| \\
&\leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Propriété 6.1.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ d'un segment I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*

— *la suite de fonctions* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* g *(qui est par conséquent continue) ;*
— *il existe un* $a \in I$ *tel que* $f_n(a)$ *converge.*

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément, et sa limite* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et vérifie* $f' = g$.

Démonstration. On écrit

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(y)dy.$$

On a alors

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(a) - f_m(a)| + \left|\int_a^x f'_n(y) - f'_m(y)dy\right| \\ &\leq |f_n(a) - f_m(a)| + |x-a| \sup_I |f'_n - f'_m| \\ &\leq |f_n(a) - f_m(a)| + \sup_{x\in I} |x-a| \sup_I |f'_n - f'_m|.\end{aligned}$$

Comme I est un segment, la quantité $\sup_{x\in I} |x-a|$ est finie. Comme la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, on en déduit que

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| = 0, \tag{6.1}$$

autrement dit, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy quel que soit x. En conséquence, f_n converge simplement quand n tend vers l'infini vers une limite, que l'on notera $f(x)$. De plus, l'équation (6.1) implique

$$\lim_n \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

de sorte que la convergence simple de f_n vers f est en fait une convergence uniforme.

Il reste maintetant à montrer que f est une fonction dérivable de dérivée g. Pour cela, on écrit, pour $h \geq 0$ (le cas $h < 0$ étant tout à fait symétrique)

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| &= \lim_n \left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x)\right| \\ &= \lim_n \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} f'_n(y) - g(y)dy\right| + \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} g(y) - g(x)dy\right| \\ &\leq \lim_n \sup_I |f'_n(y) - g(y)| + \sup_{y\in[x,x+h]} |g(y) - g(x)| \\ &= 0 + \sup_{y\in[x,x+h]} |g(y) - g(x)|.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, le terme de droite tend vers 0 en vertu de la continuité de g sur I.

Par conséquent, la quantité $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend bien vers $g(x)$, ce qui montre que f est dérivable de dérivée g. □

On peut généraliser ce résultat pour des fonctions k fois dérivables :

Corollaire 6.1.6. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$ *d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*

— *la suite de fonctions* $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* g *(qui est par conséquent continue) ;*

— *pour tout* q *dans* $\{0,\ldots,k-1\}$*, il existe un* $a_q \in I$ *tel que* $\left(f_n^{(q)}(a_q)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément, sa limite* f *est de classe* $\mathcal{C}^k$*, et pour tout* q *dans* $\{1,\ldots,k\}$ *la suite* $(f_n^{(q)})$ *converge uniformément vers* $f^{(q)}$*.*

Démonstration. Il suffit de raisonner par récurrence sur k en appliquant la propriété précédente. □

Pour les séries, on utilise également le vocabulaire suivant :

Définition 6.1.7. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur un intervalle* I*. Si la série (à termes réels)* $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ *converge, on dit que la série* $\sum f_n$ *converge* normalement.

Cette notion permet en fait de rapporter la convergence uniforme d'une série de fonction à la convergence d'une suite de réels. En effet, on a l'implication :

Propriété 6.1.8. *Une série de fonction qui converge normalement converge uniformément.*

Démonstration. On considère une série de fonction $\sum f_n$ convergeant normalement. Pour tout x, on a

$$\sum_{n=0}^{N} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} \sup_I |f_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup_I |f_n|.$$

Par conséquent, pour tout x, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, et donc convergente. On a alors la majoration, pour $x \in I$

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_I |f_n|. \end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure en x, on obtient

$$\sup_{x\in I}\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_I |f_n| \to_N 0,$$

ce qui montre que la convergence est uniforme en x. □

6.1.1 Approximation de fonctions

Il peut souvent être utile d'approcher une fonction donnée par une autre fonction vérifiant certaines propriétés, par exemple une fonction continue, ou dérivable, ou bien encore une fonction en escalier.

Théorème 6.1.9. *Soit* f *une fonction continue sur un segment* $[a,b]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *et* ε *un réel positif.*

— *Il existe une fonction g continue et affine par morceaux telle que* $\sup_{[a,b]} |f-g| \leq \varepsilon$.
  De manière équivalente, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions continues et affines par morceaux qui converge vers f uniformément sur $[a,b]$ (prendre pour g_n la fonction obtenue en posant $\varepsilon = \frac{1}{n}$).*
— *Il existe une fonction h en escalier telle que* $\sup_{[a,b]} |f-h| \leq \varepsilon$.
  De manière équivalente, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions en escalier qui converge vers f uniformément sur $[a,b]$ (prendre pour h_n la fonction obtenue en posant $\varepsilon = \frac{1}{n}$).*

Ce résultat est illustré sur la figure 6.2.

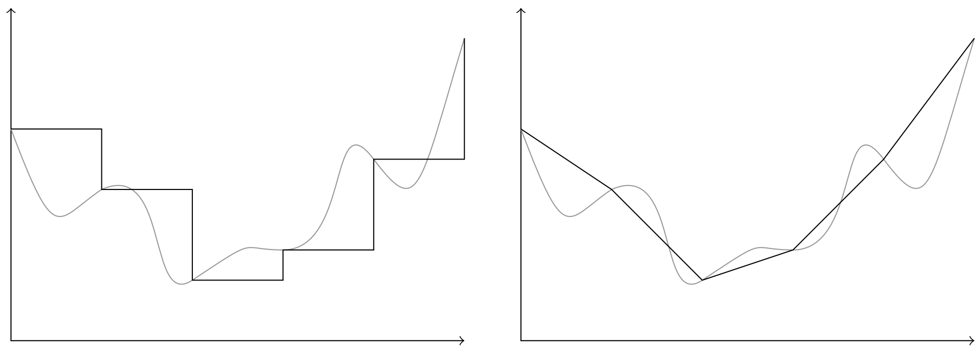

FIGURE 6.2 – Approximation d'une fonction continue par une fonction en escalier et par une fonction affine par morceaux.

Démonstration. Pour simplifier, on supposera que $[a,b] = [0,1]$ (on peut s'y ramener par un simple changement de variables).

La fonction f étant continue sur un segment, elle est uniformément continue par le théorème de Heine. Par conséquent, étant donné un $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n > 0$ tel que si $|x-y| \leq \frac{1}{n}$ on a $|f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On prend alors comme fonction g la fonction affine par morceaux par rapport à la subdivision $0 < \frac{1}{n} < \ldots < \frac{k-1}{n} < 1$. valant $f\left(\frac{k}{n}\right)$ au point $\frac{k}{n}$ pour chaque entier $k \in \{0,\ldots,n\}$. Si x est un élément de $[0,1]$, on peut noter k l'entier tel que $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$. On a alors :

$$|f(x)-g(x)| \leq \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|g\left(\frac{k}{n}\right) - g(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En effet, $|x - \frac{k}{n}| \leq \frac{1}{n}$, de sorte que $|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et comme g est affine sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a

$$\left|g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \left|g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| = \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a finalement $\sup_{[0,1]} |f-g| \leq \varepsilon$.

Pour les mêmes raisons, on pourra vérifier que la fonction h prenant la valeur constante $f(\frac{k}{n})$ sur chaque intervalle de la forme $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ vérifie

$$\sup_{[0,1]} |f-h| \leq \varepsilon.$$

□

6.2 Séries entières

Dans cette partie, on va s'intéresser à un cas particulier de série de fonctions qui généralise la notion de polynôme.

Définition 6.2.1. *Une* série entière *est une série de la forme* $\sum a_n z^n$*, où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite complexe et* z *est un élément de* $\mathbb{C}$*.*

Le point de vue le plus naturel pour étudier les séries entières est de les considérer comme des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. La forme de l'ensemble sur lequel la série converge a une description simple, comme on va le voir dans la partie suivante.

6.2.1 Rayon de convergence

Théorème 6.2.2. *Pour tout série entière* $\sum a_n z^n$*, il existe* $R \in [0, \infty]$*, appelé* rayon de convergence *de la série, tel que* $\sum a_n z^n$ *diverge si* $|z| > R$ *et converge si* $|z| < R$*.*

Pour la preuve de ce résultat, on aura besoin du résultat intermédiaire suivant :

Lemme 6.2.3 (Lemme d'Abel)**.** *Si il existe un nombre complexe* z_0 *tel que* $a_n z_0^n$ *tende vers* 0*, alors la série* $\sum a_n z^n$ *converge pour tout* z *tel que* $|z| \le |z_0|$*.*

Démonstration. Le fait que $a_n z_0^n$ tend vers 0 peut s'écrire $a_n = o(|z_0|^{-n})$. Par conséquent, si $|z| \le |z_0|$, on a

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0 \frac{z}{z_0} \right| = \underbrace{|a_n z_0|}_{=o(1)} \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n = o\left(\left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n \right).$$

Comme $\frac{|z|}{|z_0|} < 1$, on en déduit que $|a_n z^n|$ est majoré par le terme général d'une série géométrique convergente, on l'on en déduit que $\sum a_n z^n$ converge. □

Preuve du théorème 6.2.2. On note $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C},\ \sum a_n z^n \text{ converge}\}$ l'ensemble des points où la série converge. On pose alors $R = \sup\{|z|,\ z \in \mathcal{C}\}$. On va montrer que cette quantité vérifie bien les propriétés énoncées dans le théorème.

Si $|z| > R$ par définition de R, le point z n'est pas dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que $\sum a_n z^n$ ne converge pas. Si $|z| < R$, il existe un élément z_0 de $\mathcal{C}$ tel que $|z| < |z_0| \le R$. On applique alors le lemme 6.2.3 : comme la série $\sum a_n z_0^n$ converge, on en déduit que $\sum a_n z^n$ converge, ce qui achève la preuve du théorème. □

Les séries entières peuvent être vues commes des séries de fonctions de la variable z. On a pour l'instant montré une convergence ponctuelle. On va voir que la convergence à en fait lieu d'une manière très forte par rapport à z.

Propriété 6.2.4. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*. Pour tout* $0 < r < R$*, la série converge uniformément sur le disque* $D(0, r)$*.*

Démonstration. Pour $z \in D(0,r)$, on a

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Ce dernier terme est le reste d'une série convergente, par conséquent, il tend vers 0. On a donc

$$\sup_{z \in D(0,r)} \left|\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \to_{N\to\infty} 0,$$

ce qui achève la preuve. □

Comme les sommes partielles d'un série entière sont des fonctions continues (se sont des polynômes) et que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue, on déduit de la propriété 6.2.4 le résultat suivant :

Corollaire 6.2.5. *Une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R définit une fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ continue sur le disque ouvert $D(0,R)$.*

On va maintenant donner quelques moyens pratiques de calculer le rayon de convergence.

Propriété 6.2.6. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont les coefficients sont non nuls à partir d'un certain rang. Si la suite $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ converge, alors sa limite est le rayon de la série.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de d'Alembert à la série $\sum a_n z^n$. En effet, on calcul le rapport

$$\frac{|a_n z^n|}{|a_{n+1} z^{n+1}|} = \frac{1}{z}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \tag{6.2}$$

Dans le cas où la suite $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ converge vers une limite R, le rapport (6.2) vers une constante plus grande que 1 si $|z| > R$, et vers une constante plus petite que 1 si $|z| < R$. Le critère de d'Alembert permet de conclure que la série converge si $|z| < R$ et diverge si $|z| > R$. Par conséquent, R est bien le rayon de convergence de la série. □

On peut en fait préciser ce résultat, quitte à obtenir un expression moins explicite.

Propriété 6.2.7 (Formule de Hadamard)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le rayon de convergence R de la série est donné par*

$$\frac{1}{R} = \limsup_n |a_n|^{1/n}.$$

Si la limite supérieure ci-dessus est nulle, ce résultat se comprend comme $R = \infty$.

Démonstration. Notons R la quantité $(\limsup_n |a_n|^{1/n})^{-1}$ et montrons qu'il s'agit bien du rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

Soit z un nombre complexe avec $|z| < R$ et r un réel vérifiant $|z| < r < R$. On a alors

$$\limsup_n |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} < \frac{1}{r} < \frac{1}{|z|}.$$

Par conséquent, à partir d'un certain rang, on a l'inégalité $|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r}$, de sorte que

$$|a_n z^n| = (|a_n|^{1/n} z)^n < \left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$

Comme $\frac{|z|}{r}$ est plus petit que 1, la série de terme général $\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge, et par conséquent, la série de terme général $|a_n z^n|$ converge également. On en déduit que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à R.

Pour montrer l'inégalité inverse, on considère un complexe z avec $R < |z|$. Comme $\limsup_n |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} > \frac{1}{|z|}$, on a l'inégalité $|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|z|}$ pour une infinité de valeurs de n, de sorte que $|a_n z^n| > 1$ pour une infinité de valeurs de n. Il s'en suit que le terme général de la série ne tend pas vers 0, et la série est divergente. □

Considérons deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Que se passe-t-il si l'on fait, pour l'instant sans chercher à justifier les calculs, le produit de ces deux séries ? On obtient

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n z^n b_m z^m &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_n b_m z^{n+m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{N}^2 \\ n+m=k}} a_n b_m z^{n+m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}\right) z^k.\end{aligned}$$

On est donc naturellement amenés à la définition suivante :

Définition 6.2.8. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On appelle* produit de Cauchy *de ces deux séries la série $\sum c_n z^n$, où la suite c_n est donnée par*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Propriété 6.2.9. *Si deux séries entières ont des rayons de convergence respectifs R_1 et R_2, alors leur produit de Cauchy a un rayon de convergence supérieur ou égal à $R = \min(R_1, R_2)$, et sur le disque de rayon R le produit de Cauchy a pour somme le produit des deux sommes.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété 3.4.4. □

On peut trouver des cas où le rayon de convergence du produit est strictement supérieur à chacun des deux rayons. Un exemple est donné par les deux séries

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{et} \quad \frac{1-z}{1+z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Ces deux séries ont un rayon de convergence de 1, en revanche, on peut vérifier que leur produit de Cauchy vaut 1, qui a donc pour rayon de convergence ∞. Cela se comprend sur le calcul $\frac{1-z}{1+z} \times \frac{1+z}{1-z} = 1$.

On a de même les propriété suivantes :

Propriété 6.2.10. *Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont des rayons de convergence respectifs R_1 et R_2, alors leur somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_1, R_2)$.*

Démonstration. C'est une réécriture du fait que la somme de deux séries convergente est convergente. □

De même, dans certains cas, le rayon peut être strictement supérieur à R_1 et R_2. Par exemple, la somme des deux séries $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ est nulle et a donc un rayon de convergence infini, alors que les deux séries ont un rayon de convergence de 1.

À partir d'une série entière, on peut définir, au moins formellement, une série "dérivée" et une série "primitive" :

Lemme 6.2.11. *Si une série entière $s(z) = \sum a_n z^n$ a un rayon de convergence de R, alors sa* série dérivée *$s'(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$ et sa* série primitive *$S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont également pour rayon de convergence R.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété 6.2.7 selon laquelle $R = (\limsup_n |a_n|^{1/n})^{-1}$. En effet, les inverses des rayons de convergence de la série dérivée et de la série primitive sont donnés respectivement par

$$\limsup_n |(n+1)a_{n+1}|^{1/n} \quad \text{et} \quad \limsup_n |a_{n-1}/n|^{1/n}.$$

Or $(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n+1)/n}$ et $(1/n)^{1/n} = e^{-\ln(n)/n}$ tendent vers 1, ce qui fait que ces deux quantités sont égales à $\limsup_n |a_n|^{1/n}$.

Sans utiliser la propriété 6.2.7, on peut aussi remarque que si $|z| < r < R$, alors $|n a_n z^{n-1}| = o(a_n r^n)$ or $\sum |a_n| r^n$ converge, donc $\sum n a_n z^{n-1}$ aussi. De même, si $R < r < |z|$, alors $|a_n r^n| = o(|n a_n z^{n-1}|)$. Or $a_n r^n$ ne tend pas vers 0, donc $n a_n z^{n-1}$ non plus, et $\sum n a_n z^{n-1}$ ne peut pas converger. Le rayon de convergence de la série dérivée est donc égal à R. Un raisonnement similaire fonctionne pour la série primitive. □

Il est à noter que l'on a pas défini de notion dérivation et de primitivation pour le fonctions définies sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, les notation S et s' ne sont que des *analogues* aux notions de dérivation et de primitivation. On peut toutefois considérer les restrictions à $\mathbb{R}$ des fonctions définies par des séries entières, qui deviennent des fonctions de la variable réelle. Les fonctions ainsi obtenues sont en fait très régulières.

Propriété 6.2.12. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. En posant $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, on définit une fonction de $]-R, R[$ dans $\mathbb{C}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
De plus, la dérivée $k^{\text{ème}}$ s'obtient en dérivant terme à terme :

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) x^{n-k}.$$

Démonstration. Pour tout N, la fonction φ_N définie par $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puisqu'il s'agit d'un polynôme. De plus, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est donnée par

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{N} a_n n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) x^{n-k}.$$

qui est une la somme partielle d'une série entière de rayon de convergence R, d'après le lemme 6.2.11. Cette dernière série converge donc uniformément sur tout segment $[-r, r]$ avec $r < R$. Par conséquent, toutes les dérivées de la suite $(\varphi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers les dérivées de φ sur $[-r, r]$. On en déduit par le corollaire 6.1.6 que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-r, r]$ pour tout $r < R$, et par conséquent sur $]-R, R[$. □

On remarquera que divers comportements sont possibles sur le cercle de convergence. Par exemple, la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ a pour rayon de convergence 1 mais la série ne converge en aucun point du cercle $|z| = 1$ (en effet si $|z| = 1$, le terme général ne tend pas vers 0). À l'opposé, la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ a également un rayon de convergence nul, mais cette fois-ci la série converge pour *tous* les complexes de module 1 (puisqu'alors $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = n^{-2}$ qui est le terme général d'une série convergente). On peut également touver des situations intermédiaires : la série $\sum \frac{z^n}{n}$, de rayon 1 converge en tout les points du cercle unité sauf en $z = 1$ (voir le corollaire 3.3.4).

6.2.2 Quelles fonctions peuvent se représenter comme des séries entières ?

Définition 6.2.13. *On dit qu'une fonction f est* développable en série entière *sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ si pour tout a de $]\alpha, \beta[$, il existe un voisinage V de a tel que pour tout x de V, on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$.*

Une question naturelle est de caractériser les fonctions développable en série entière. Une première remarque est que les séries entières définissent des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent, une fonction développable en série entière est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Inversement, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]\alpha, \beta[$. On se demande si f est développable en série entière. Si c'était le cas, on aurait, sur un voisinage de tout point a de $]\alpha, \beta[$, :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n,$$

et les dérivées successives de f seraient données par

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x - a)^{n-k},$$

Par conséquent, en évaluant l'expression précédente en $x = a$, on aurait $f^{(k)}(a) = k! a_k$. Autrement dit, le seul développement possible pour f est alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Ce développement correspond au développement de Taylor en a de la fonction f au point a, avec une infinité de termes.

Par conséquent, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sera développable en série entière quand sa série de Taylor converge et est égale à la fonction. On peut donc trouver des fonctions de classes $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière en se plaçant dans un des deux cas suivants :

— Le développement de Taylor de la fonction correspond à une série entière de rayon nul. Par exemple, étant donné une suite de réels quelconques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est possible de construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ en 0 est donnée par a_n (nous ne détaillerons pas la construction). Si f est la fonction ainsi associée à la suite $\big((n!)^2\big)_{n\in\mathbb{N}}$, la série de Taylor de f est $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$, qui a un rayon de convergence nul.

— La série de Taylor a un rayon de convergence strictement positif, mais la somme de la série diffère de la fonction f. Par exemple, la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et toutes ses dérivées sont nulles en zéro (exercice !). Sa série de Taylor en 0 est donc la série nulle, qui a un rayon de convergence infini, mais qui ne coïncide pas avec f.

En fait on peut caractériser les fonctions développables en série entière de la manière suivante :

Propriété 6.2.14. *Une fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ si et seulement la proposition*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-r, r[,\ |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$

est vérifiée.

Démonstration. Admis. □

6.3 Exercices

Exercice 6.1.
Les suites de fonctions suivantes convergent-elles simplement (pour $n \to \infty$) ? uniformément ? On pourra considérer différents ensembles de définition.

$$x^n\ ;\ \frac{nx}{1+nx}\ ;\ \frac{1+nx}{n^2+x^2}.$$

Exercice 6.2.
Les séries de fonctions suivantes convergent-elles simplement ? uniformément ? normalement ? On pourra considérer différents ensembles de définition.

$$\sum e^{-nx}\ ;\ \sum \frac{1}{1+x^2n^2}\ ;\ \sum \frac{1}{n^2+x^2}.$$

Exercice 6.3.
Soit a un réel positif. Montrer que la suite des fonctions $x \mapsto (1 + x/n)^n$ converge uniformément vers e^x sur l'intervalle $[-a, a]$.

Exercice 6.4.
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Montrer que la suite $(\deg(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. En déduire que f est un polynôme.

Exercice 6.5.
On considère la série $\sum e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, cette série converge uniformément sur $[\varepsilon, \infty[$. On notera sa somme $f(x)$.
2. Montrer l'inégalité
$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{y}}dy \leq \frac{1}{N} f\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \leq \int_{1/n}^\infty e^{-\sqrt{y}}dy.$$
3. En déduire un équivalent simple de f en 0.

Exercice 6.6.
On va montrer l'égalité
$$\int_0^1 x^{-x} = \sum_{n=1}^\infty n^{-n}.$$

1. Montrer l'égalité
$$\int_0^1 x^{-x} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{(-x\ln(x))^n}{n!} dx.$$
2. Montrer que
$$\int_0^1 x^n \ln(x)^n dx = (-1)^n (n+1)^{-(n+1)} \int_0^\infty e^{-y} y^n dy$$
(on pourra utiliser le changement de variable $y = -(n+1)\ln(x)$).
3. Montrer la relation $\int_0^\infty e^{-y} y^n dy = n!$.
4. Conclure.

Exercice 6.7.
Montrer que la série $\sum \frac{1}{(x-n)^2}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On note sa somme $f(x)$. Montrer que la fonction f est 1-périodique, et que la convergence de la série vers f est uniforme sur tout intervalle de la forme $[k+\varepsilon, k+1-\varepsilon]$ avec k entier et $\varepsilon > 0$.

Exercice 6.8.
On considère la série $\sum n^{-x}$ où $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que cette série converge dès que $x > 1$. Dans ce cas, on notera sa somme $\zeta(x)$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{(\ln(n))^k}{n^x}$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $]1+\varepsilon, \infty[$, avec $\varepsilon > 0$.
3. En déduire que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, \infty[$.
4. Montrer l'inégalité $\int_1^\infty \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^x}$.
5. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ pour $x \to 1$. Que vaut $\lim_{x\to\infty} \zeta(x)$?

Exercice 6.9.
Soient $k \in \mathbb{N}$ un entier et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathbb{R}$ telle que $\sum n^k c_n$ converge absolument. Montrer que la série $\sum c_n e^{int}$ définit une fonction f 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$. Montrer de plus que c_n est donné par $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

Exercice 6.10.
Donner une expression de la somme des séries entières suivantes, en précisant leur rayon de convergence :

$$\sum(\exp(n)+\exp(-n))z^n,\quad \sum\cos(n)z^n,\quad \sum\frac{1}{n(n-1)}z^n,\quad \sum\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)z^n.$$

Exercice 6.11.
Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum\frac{n^n}{n!}z^n,\quad \sum\frac{n!^2}{(2n)!}z^n,\quad \sum\frac{n!^3}{(3n)!}z^n,\quad \sum(1+1/n)^{n^2}z^n.$$

Exercice 6.12.
On définit la suite de Fibonacci par $u_0=u_1=1$ et $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ pour $n\geq 1$. Donner le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$ et calculer sa somme.

Exercice 6.13.
Donner le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes, en précisant le rayon de convergence :

$$e^x\cos(x),\frac{x+2}{x^2-1},\frac{1}{(x-1)(x+2)},\int_0^x\frac{\sin(t^2)}{t}dt.$$

Exercice 6.14.
Donner toutes les solutions de l'équation

$$t^2y''+ty'+y=\frac{1}{1+t^2}$$

développables en série entière en 0.

Exercice 6.15.
Montrer que la fonction $t\mapsto(1+t)^\alpha$ est l'unique solution sur $]-1,1[$ de l'équation

$$\begin{cases}(1+t)y' & =\alpha y,\\ y(0) & =1.\end{cases}\tag{6.3}$$

Montrer que si $\sum\frac{a_n}{n!}t^n$ est solution de (6.3) au vosinage de 0, alors $a_{n+1}=(\alpha-n)a_n$. En déduire qu'une telle suite (a_n) existe et est unique, et donner son expression. Calculer le rayon de convergence de $\sum\frac{a_n}{n!}t^n$ et en déduire le développement en série entière de $(1+t)^\alpha$ en 0.

Chapitre 7

Fonctions usuelles

La plupart des fonctions que l'on rencontre usuellement en analyse sont obtenue à partir de diverses opérations sur des fonctions simples, principalement les polynômes, la fonction exponentielle et les logarithmes.

Dans ce chapitre, on va donner les définitions et prouver les principales propriétés de ces fonctions.

7.1 Définitions

7.1.1 Les polynômes

Définition 7.1.1. *On appelle* fonction polynôme *une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{7.1}$$

pour des réels $(a_k)_{k\in\{0,\dots n\}}$.

Propriété 7.1.2. *Les polynômes sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et la dérivée de la fonction polynôme f définie en* (7.1) *est la fonction polynôme donnée par*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Démonstration. Commençons par traiter le cas de la fonction $x \mapsto x^k$. Grâce à la formule du binôme, on a, pour x et h des réels avec $h \neq 0$:

$$\frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}x^{k-q}h^q - x^k\right) = \sum_{q=1}^{k}\binom{k}{q}x^{k-q}h^{q-1} = kx^{k-1} + h\sum_{q=2}^{k}\binom{k}{q}x^{k-q}h^{q-2}.$$

On a donc, dans la limite $h \to 0$, le développement $\frac{(x+h)^k - x^k}{h} = kx^{k-1} + o(1)$, de sorte que $x \mapsto x^k$ est dérivable de dérivée kx^{k-1}. Par récurrence, la dérivée $k+1^{\text{ème}}$ de x^k est la fonction nulle qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les fonctions monômes $x \mapsto x^k$ sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, et par combinaison linéaire, c'est aussi le cas des fonctions polynômes. $\square$

7.1.2 L'exponentielle

Définition 7.1.3. *On appelle* fonction exponentielle *la fonction* exp *définie sur* $\mathbb{C}$ *par la série entière*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{7.2}$$

On peut vérifier en utilisant la propriété 6.2.6 que la série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a bien un rayon de convergence infini, de sorte que la foncion exponentielle est effectivement définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Comme les coefficients de la série entière définissant exp sont réels, la restriction à $\mathbb{R}$ de exp est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs réelles. Son graphe est tracé en figure 7.1.

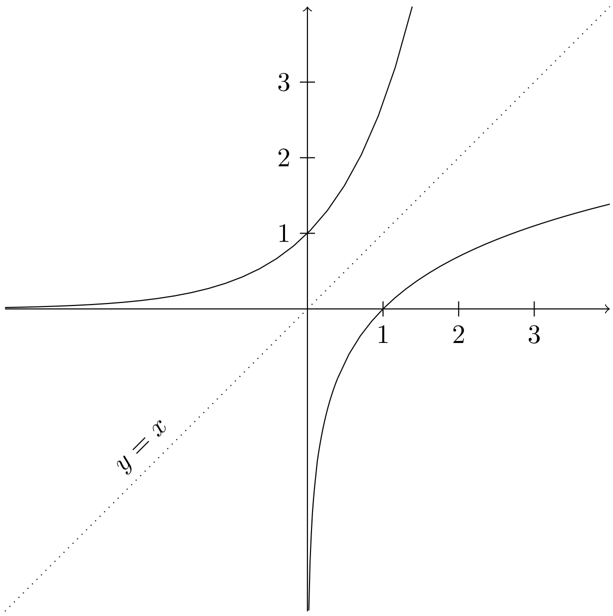

FIGURE 7.1 – Les graphes des fonctions exp et ln. Chaque graphe est le symétrique de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Voici une propriété importante de l'exponentielle, qui aurait également pu servir de définition.

Propriété 7.1.4. *La restriction à* $\mathbb{R}$ *de la fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle avec condition initiale :*

$$\begin{cases} y' &= y, \\ y(0) &= 1. \end{cases} \tag{7.3}$$

Démonstration. On a clairement $\exp(0) = 1$, et la propriété 6.2.12 de dérivation des série entières montre que

$$\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(x).$$

La fonction exponentielle est donc bien solution de l'équation (7.3).

Pour montrer que l'exponentielle est l'unique solution de (7.3), on considère une solution y, et on va montrer que $y(x)e^{-x}$ vaut 1, quel que soit le réel x. Pour cela, on dérive

$$(y(x)e^{-x})' = y'(x)e^{-x} + y(x)(-e^{-x}) = y(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = 0.$$

Par conséquent, la fonction $y(x)e^{-x}$ est constante égale à $y(0)e^{-0} = 1$, ce qui achève la démonstration. □

Une autre propriété qui caractérise l'exponentielle :

Propriété 7.1.5. *La fonction exponentielle est l'unique fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant la proposition*

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ f(a+b) = f(a)f(b), \tag{7.4}$$

qui soit dérivable en 0 *avec* $f'(0) = 1$.

De plus, la relation (7.4) *est également vraie si* a *et* b *sont des nombres complexes.*

La propriété (7.4) fait qu'il est naturel d'utiliser la notation $\exp(z) = e^z$. On notera aussi $e = \exp(1)$.

Démonstration. On a bien $\exp'(0) = 1$, et le fait que la fonction exponentielle vérifie la proposition (7.4) se déduit du calcul suivant :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!n!} a^k b^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b^n\right).\end{aligned}$$

Ce calcul est justifié par la propriété 3.4.2 et le fait que la série (7.2) soit absolument convergente pour $z = a$ et $z = b$.

Pour montrons l'unicité, on va montrer qu'une fonction qui satisfait les hypothèses de la propriété 7.1.5 est une solution de l'équation (7.3), qui admet une unique solution. Soit donc f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Une telle fonction vérifie pour tout x réel $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0)$. Comme $f'(0) = 1$, la fonction f est non constante et il existe au moins un x_0 pour lequel $f(x_0) \neq 0$. L'égalité $f(x_0) = f(0)f(x_0)$ entraîne donc $f(0) = 1$. Il ne reste qu'à montrer l'égalité $f' = f$, qui se déduit du calcul suivant, pour a et h des réels, $h \neq 0$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a)f(h) - f(a)}{h} = f(a)\frac{f(h) - 1}{h} \to_{h\to 0} f(a)f'(0) = f(a).$$

Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Elle est donc solution de l'équation (7.3), et on a alors $f = \exp$. □

Propriété 7.1.6. *La fonction* $\exp$ *est à valeurs dans* $\mathbb{C}^*$. *De plus, la restriction de* $\exp$ *à* $\mathbb{R}$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0, \infty[$.

Démonstration. Si il existe un élément z_0 de $\mathbb{C}$ tel que $e^{z_0} = 0$, alors pour tout z de $\mathbb{C}$, on aurait, d'après la proposition 7.1.5, $e^z = e^{z-z_0} \times e^{z_0} = e^{z-z_0} \times 0 = 0$. Or la fonction exponentielle n'est pas la fonction nulle.

On a déja vu que l'exponentielle envoyait $\mathbb{R}$ dans $]0, \infty[$. De plus, comme $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ la fonction exponentielle est strictement croissante.

Pour montrer qu'il s'agit d'une bijection, il suffit, par le théorème des valeurs intermédiaires, de montrer que les deux limites $\lim_{x\to-\infty} e^x$ et $\lim_{x\to\infty} e^x$ (qui existent par monotonie) valent respectivement 0 et ∞. Comme $e^{-x} = 1/e^x$, il suffit de montrer $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$. Or, puisque $e^0 = 1$ et $\exp'(0) = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $e^\alpha > 1$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \lim_n e^{n\alpha} = \lim_n (e^\alpha)^n = \infty,$$

d'où le résultat. □

7.1.3 Le logarithme

Définition 7.1.7. *On appelle fonction* logarithme néperien *(ou plus simplement logarithme) la fonction* $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *réciproque de la fonction* $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$. *Cette fonction est bien définie en vertu de la propriété 7.1.6.*

Le graphe de ln est tracé sur la figure 7.1.

La proposition suivante aurait pu servir de définition à la fonction ln.

Propriété 7.1.8. *La fonction* ln *est l'unique primitive de* $x \mapsto 1/x$ *s'annulant en* 1.

Démonstration. L'unique primitive de $x \mapsto 1/x$ est la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \frac{dy}{y}$. Il suffit de montrer que F est la réciproque de l'exponentielle. Pour celà, on calcule, pour $x \in \mathbb{R}$, avec le changement de variable $y = e^z$:

$$F(e^x) = \int_1^{e^x} \frac{dy}{y} = \int_0^x \frac{e^z dz}{e^z} = \int_0^x dz = x.$$

La fonction F est donc bien la fonction réciproque de l'exponentielle : $F = \ln$. □

La proposition suivante est une autre caractérisation de la fonction ln.

Propriété 7.1.9. *La fonction* ln *est l'unique fonction de* $]0, \infty[$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant*

$$\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),$$

qui soit dérivable en 1 *avec* $f'(1) = 1$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que ln vérifie les conditions de l'énoncé. Si a et b sont deux réels, on a

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab = e^{\ln(ab)}.$$

Comme les réels $\ln(ab)$ et $\ln(a) + \ln(b)$ on même image par la fonction exponentielle qui est bijective, ils sont égaux. L'égalité $\ln'(1) = 1$ vient du calcul de la dérivée d'une fonction réciproque (propriété 4.3.6).

Il reste à montrer que si f est une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé, alors $f = \ln$. On remarque tout d'abord que $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$, de sorte que $f(1) = 0$. Ensuite, on écrit, pour $x > 0$ et $h \in]-x, \infty[$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x) + f(1 + h/x) - f(x)}{h} = \frac{f(1 + h/x)}{h}.$$

Or, comme $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, on a $f(1 + h/x) = h/x + o(h)$, de sorte que $\frac{f(1+h/x)}{h} = \frac{1}{x} + o(1)$. Autrement dit, f est dérivable sur $]0, \infty[$ avec $f'(x) = \frac{1}{x}$. La fonction f est donc une primitive de $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1, donc $f = \ln$ d'après la propriété 7.1.8. □

7.1.4 Les puissances

On avait définit les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ pour x réel quelconque dans le cas où n est un entier naturel. On peut l'étendre au cas $n \in \mathbb{Z}$ si on impose $x \neq 0$. La fonction exponentielle permet de généraliser ces fonctions à un exposant réel quelconque en imposant $x > 0$.

Définition 7.1.10. *Pour α un réel et $x > 0$, on définit x^α par la formule*

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$

Cette notation est cohérente avec les notations $\exp(x) = e^x$ et x^n.

Propriété 7.1.11. *Pour α un réel quelconque, la fonction f_α définie sur $]0, \infty[$ par la formule*

$$f_\alpha(x) = x^\alpha$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$, et sa dérivée est donnée par

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Cette proposition ne revient pas exactement à la propriété 7.1.2 car on n'a pas donné la même définition pour x^α dans le cas $(x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ et dans le cas $(x, \alpha) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction f_α est d'après la définition 7.1.10 la composée de la fonction ln qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$ et de la fonction exponentielle qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f_α est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$ et vérifie

$$f'_\alpha(x) = \alpha \ln'(x) \exp(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln x) = \alpha \exp(-\ln x) \exp(\alpha \ln x) = \alpha \exp((\alpha - 1) \ln x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

□

7.1.5 Les fonctions trigonométriques

Définition 7.1.12. *Pour x un réel, on pose* $\cos(x) = Re(e^{ix})$ *et* $\sin(x) = Im(e^{ix})$. *Autrement dit on a* $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$.

On pose également $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, *quand* $\cos(x) \neq 0$.

Les graphes des fonctions cos, sin et tan sont tracés sur la figure 7.2.

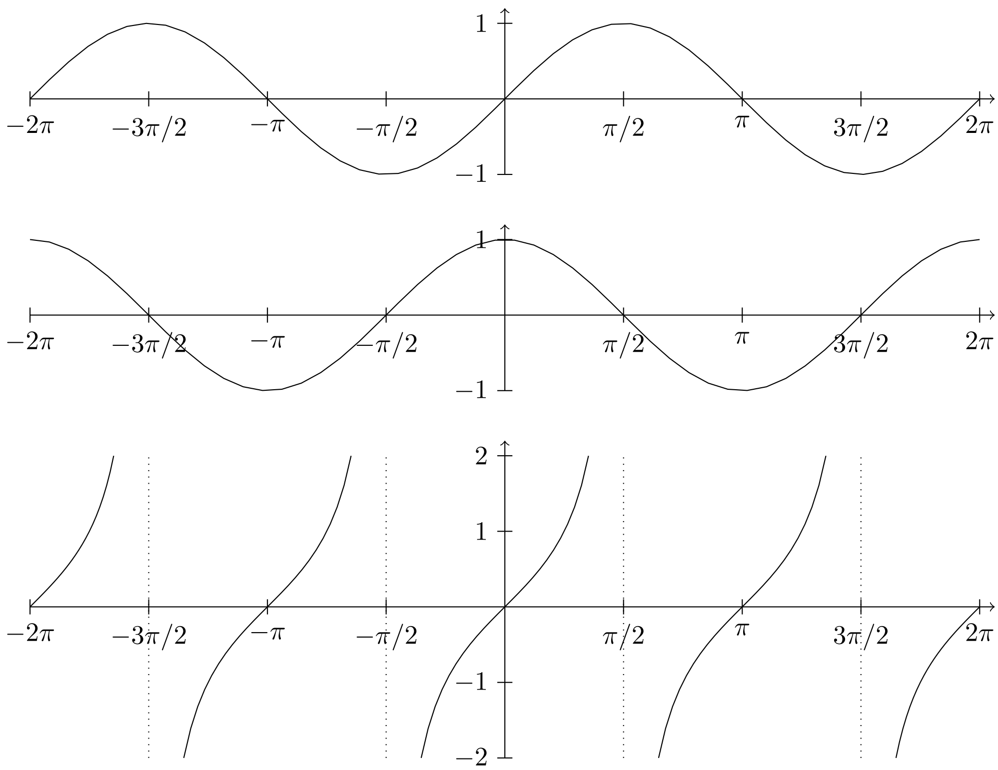

FIGURE 7.2 – De haut en bas, les graphes des fonctions sin, cos et tan, sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Propriété 7.1.13. *Si x est réel, alors e^{ix} est de module 1. Notamment, on a la formule*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1,$$

et les fonctions sin *et* cos *sont à valeurs dans* $[-1, 1]$.

De plus, on a $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$, *d'où*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \ \ et\ \ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Démonstration. Si x est réel, on a

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{ix^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} = e^{-ix}.$$

Par conséquent, $|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = 1$. On obtient alors $1 = |e^{ix}|^2 = |\cos(x) + i\sin(x)|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$. □

Comme e^{ix} est de module 1, l'image de la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est incluse dans le cercle de centre 0 et de rayon 1. En vertu de l'égalité $|(e^{ix})'| = |ie^{ix}| = 1$, la longueur de la courbe $(e^{it})_{t\in[0,x]}$ est de x. Par conséquent, le paramètre x correspond à la longeur de l'arc de cercle compris entre e^{i0} et e^{ix} (en tenant compte du sens de rotation et du nombre de tours complets effectués).

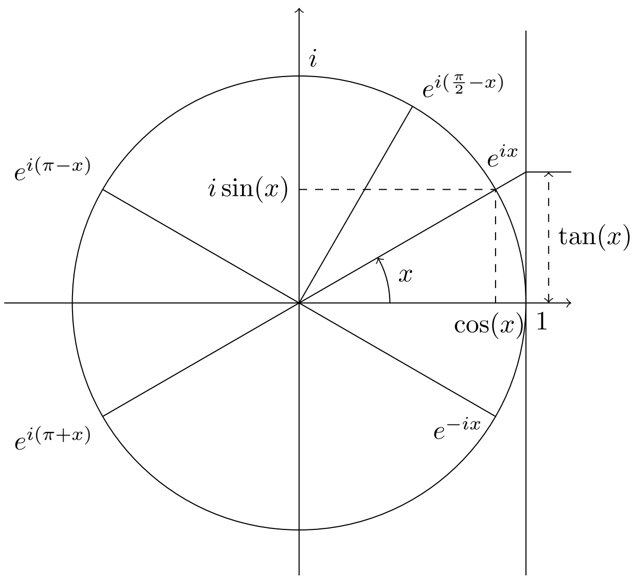

FIGURE 7.3 – Le cercle trigonométrique.

Propriété 7.1.14. *Les fonctions* sin *et* cos *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*, avec* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$*. La fonction* tan *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *hors de l'ensemble des solutions de* $\cos(x) = 0$*, et on a*

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Démonstration. Les fonctions sin et cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ car il s'agit des parties réelles et imaginaires de la fonction $x \mapsto e^{ix}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les égalités $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ découlent du calcul

$$\cos'(x) + i\sin'(x) = (e^{ix})' = ie^{ix} = -\sin(x) + i\cos(x).$$

Pour la tangente, on a $\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'\cos - \cos'\sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}$, et on utilise $\tan = \sin/\cos$ ou $\cos^2 + \sin^2 \equiv 1$. □

Propriété 7.1.15. *Il existe un plus petit nombre strictement positif* π *tel que* $\cos(\pi/2) = 0$*. On a approximativement* $\pi = 3.141592...$*.*

Le nombre π *vérifie l'égalité* $e^{i\pi/2} = i$*, et donc* $e^{2i\pi} = i^4 = 1$*.*

Notamment, pour tout nombre complexe z *et tout entier* k*, on a* $e^{z+2ik\pi} = e^z$*. En particulier, les fonction* sin*,* cos *et* $x \mapsto e^{ix}$ *sont* 2π*-périodiques.*

Démonstration. Par définition du cosinus, on a $\cos(0) = 1 > 0$. De plus la propriété 3.3.1 nous donne la majoration

$$\cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaire, la fonction cos s'annule au moins une fois sur $[0, 2]$. Comme $\cos(0) > 0$, il existe bien un plus petit réel strictement positif $x_0 = \pi/2$ avec $\cos(x_0) = 0$.

On a alors

$$1 = \cos^2(\pi/2) + \sin^2(\pi/2) = 0 + \sin^2(\pi/2).$$

Par conséquent $\sin(\pi/2)$ vaut soit 1 soit -1. Or, sin a une dérivée positive sur $[0, \pi/2]$ si bien que $\sin(\pi/2) > 0$, d'où $\sin(\pi/2) = 1$, et donc $e^{i\pi/2} = i$. On a donc $e^{2i\pi} = i^4 = 1$. □

Propriété 7.1.16. *Pour tout réel* x*, on a*

1. $\sin(x) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(-x)$ *;*
2. $\cos(x) = \cos(-x) = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x)$ *;*
3. $\tan(x) = \tan(x + \pi) = -\tan(-x) = -\tan(\pi - x)$ *;*
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$*.*

Démonstration. Utiliser la formule $e^{x+y} = e^x e^y$ et les égalités $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$. □

On a quelques formules pour modifier une expression incluant des fonctions trigonométriques. Il ne faut pas les connaître par cœur, mais plutôt savoir qu'elles existe et être capable de les retrouver. On peut toutes les montrer en utilisant la formule $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$, ainsi que les définitions $\cos(x) = Re(e^{ix}) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, $\sin(x) = Im(e^{ix}) = (e^{ix} ie^{-ix})/2i$ et $\tan = \sin/\cos$.

Propriété 7.1.17 (Angle somme)**.** *Pour tout réels* x *et* y*, on a les égalités (quand les quantités sont définies)*

— $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ *;*

— $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$;
— $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$;
— $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$;
— $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$;
— $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.

Propriété 7.1.18 (Linéarisation d'un produit)**.** *Pour tout réels x et y, on a les égalités (quand les quantités sont définies)*
— $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$;
— $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$;
— $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.

Propriété 7.1.19 (Factorisation d'une somme)**.** *Pour tout réels x et y, on a les égalités (quand les quantités sont définies)*
— $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
— $\cos(x) - \cos(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$;
— $\cos(x) + \cos(y) = -2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
— $\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}$.

Propriété 7.1.20 (Tangente de l'arc moitié)**.** *Pour tout réel x, on a les égalités*
— $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$;
— $\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$;
— $\tan(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)}$.

7.1.6 Les fonctions trigonométriques réciproques

On peut définir des réciproques pour les fonctions trigonométriques, pour peu que l'on se restreigne à un sous-intervalle de $\mathbb{R}$:

Définition 7.1.21. — *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction* sin *induit une bijection*

$$\sin : \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1].$$

On note arcsin *la réciproque à valeurs dans* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *:*

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

— *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction* cos *induit une bijection*

$$\cos : [k\pi, (k+1)\pi] \to [-1, 1].$$

On note arcsin *la réciproque à valeurs dans* $[0, \pi]$ *:*

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

— *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *la fonction* tan *induit une bijection*

$$\tan : \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}.$$

On note arctan *la réciproque à valeurs dans* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *:*

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Les graphes des trois fonctions arccos, arcsin et arctan sont tracés sur les figures 7.4 et 7.5.

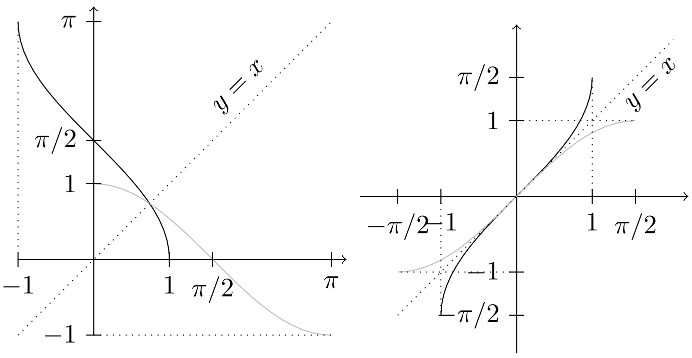

FIGURE 7.4 – À gauche, les graphes des fonctions cos et arccos, à droite des fonctions sin et arcsin. Le graphe d'une fonction et de sa réciproque sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

Propriété 7.1.22. *Les fonctions* arcsin*,* arccos *et* arctan *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *respectivement sur* $]-1,1[$, $]-1,1[$ *et* $\mathbb{R}$*, et on a :*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration. On dérive l'égalité $x = \sin(\arcsin(x))$ valide pour tout x de $]-1,1[$, et on obtient $1 = \arcsin'(x)\cos(\arcsin(x))$. De plus, comme $\arcsin(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a $\cos(\arcsin(x)) > 0$ et l'égalité $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ donne

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

Finalement, on obtient $1 = \arcsin'(x)\sqrt{1-x^2}$ d'où le résultat pour la fonction arcsin. Le raisonnement est similaire pour les fonction arccos et arctan.

Les dérivées obtenues étant des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, les fonction arcsin, arccos et arctan sont elles aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

Propriété 7.1.23. *Ces trois fonctions vérifient les formules suivantes, pour x tel que les quantités soient définies :*

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}, \ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \mathit{signe}(x)\frac{\pi}{2}.$$

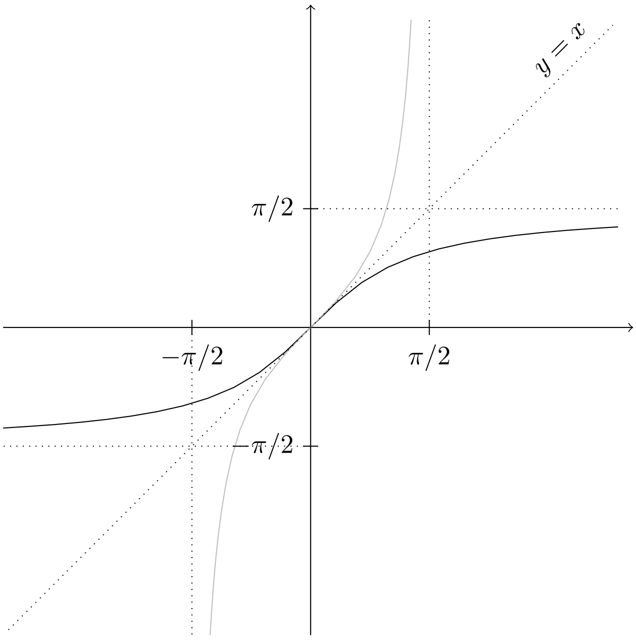

FIGURE 7.5 – Les graphes des fonctions tan et arctan.

De plus, pour x et y réels, on a

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi,$$

où $k = 1$ si $xy > 1$ et $x > 0$; $k = -1$ si $xy > 1$ et $x < 0$; $k = 0$ si $xy < 1$.

Démonstration. Les dérivées de arccos et arcsin étant opposées, la fonction arccos + arcsin est constante égale à $\arccos(0) + \arcsin(0) = \pi/2 + 0$.

Par le calcul, on voit que la fonction $\arctan(1/x) + \arctan(x)$ a une dérivée nulle. Cette fonction étant définie sur $\mathbb{R}^*$, elle est constante sur $]0, \infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. Les valeurs prises sur ces deux ensembles peuvent se déduire des égalités $\arctan(1/1) + \arctan(1) = 2 \times \pi/4$ et $\arctan(1/(-1)) + \arctan(-1) = 2 \times (-\pi/4)$. □

7.2 Développements en série entière et développements limités

7.2.1 Développement en série entière

On a les développements suivants au voisinage de 0, donnés avec leur rayon de convergence.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad R = \infty, \text{ (résolution de } y' = y)$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad R = \infty, \text{ (partie impaire de } e^{iz})$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad R = \infty, \text{ (partie paire de } e^{iz})$$

$$\tan(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9 + ..., \quad R = \frac{\pi}{2}, \text{ (quotient } \frac{\sin}{\cos}\text{, pas de formule explicite simple)}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad R = 1, \text{ (série géométrique)}$$

$$\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{n}, \quad R = 1, \text{ (primitivation du précédent)}$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad R = \infty \text{ si } \alpha \in \mathbb{N},\ R = 1 \text{ sinon (série de Taylor)}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad R = 1, \text{ (substitution } z \to -z^2 \text{ dans } \frac{1}{1-z})$$

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}, \quad R = 1, \text{ (primitivation du précédent)}$$

$$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{(2n+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)} z^{2n+1}, \quad R = 1, \quad \text{(primitivation de } (1-z^2)^{-1/2})$$

$$\arccos(z) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{(2n+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)} z^{2n+1}, \quad R = 1, \quad \text{(primitivation de } -(1-z^2)^{-1/2}).$$

7.3 Exercices

Exercice 7.1.
Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$:

$$\cos(2x)\sin(3x), \quad \cos(4x), \quad \sin(5x).$$

Exercice 7.2.
Exprimer les fonctions suivantes à partir de $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(y)$ et $\cos(y)$.

$$\cos(2x-y)\sin(x+y), \quad \cos(3x+y)\sin^2(x-y).$$

Exercice 7.3.
Linéariser les expressions suivantes :

$$\cos^4(x), \quad \sin^3(x), \quad \cos(x)^3\sin^2(x).$$

Exercice 7.4.
Donner une expression des fonctions suivantes en fonction de $\tan(x)$:

$$\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+1}, \quad \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)-\sin^4(x)}, \quad \cos^4(x)-\cos(x)\sin^3(x).$$

Exercice 7.5.
Donner une expression des fonctions suivantes en fonction de $\tan(x/2)$:

$$\frac{1}{\cos(x)+\tan(x)}, \quad \frac{1+\cos^3(x)}{\cos^2(x)}, \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}.$$

Exercice 7.6.
Calculer les intégrales suivantes. On pourra effectuer un changement de variables trigonométrique : $u=\sin(x)$, $u=\cos(x)$, $u=\tan(x)$, ou $u=\tan(x/2)$.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx, \quad \int_0^a \frac{dx}{1+\sin x\cos x}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

Exercice 7.7.
Montrer l'égalité

$$2^n \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)}{\sin(x)}.$$

Exercice 7.8.
Montrer que

$$\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \ldots \pm a_n) = 2^n \cos(a_1)\cos(a_2)\ldots\cos(a_n),$$

où $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \ldots \pm a_n)$ désigne la somme sur tout les choix de signes possibles.

Chapitre 8

Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont la quantité inconnue à déterminer est une fonction, et faisant intervenir des dérivées de cette fonction. Les équations différentielles permettent de modéliser divers phénomènes physiques. Une question importante du point de vue mathématique est le caractère bien posé de ces équations : l'équation admet-elle une solution ? Cette solution est elle unique ?

On appelle *problème de Cauchy* une équation de la forme

$$\begin{cases} y'(t) & = f(y(t), t), \\ y(t_0) & = y_0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Ici f est une fonction définie sur $\Omega \times I$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On a aussi $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$. On est donc en présence d'une équation différentielle et d'une condition initiale.

Graphiquement parlant, rechercher une solution de l'équation $y'(t) = f(y(t), t)$ revient à trouver une courbe dans l'espace des coordonnées (t, x) qui soit en tout point tangente au champ de vecteur $(1, f(y, t))$. En effet, on cherche la courbe $(t, y(t))$, dont la dérivée par rapport à t est $(1, f(y(t), t))$. Par exemple, sur la figure 8.1, on a représenté le champ de vecteur $(1, y)$, ainsi que deux solutions $y_1(t) = 0.1e^t$ et $y_2(t) = -2e^t$ de l'équation $y' = y$.

8.1 Le cas linéaire

Dans cette partie, on se limitera au cas simple et courant en pratique des équations différentielles *linéaires*, c'est-à-dire pour lequel la fonction f qui apparaît dans l'équation (8.1) est affine par rapport à y. Autrement dit, il s'agit des problèmes de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} y'(t) & = A(t)y(t) + b(t), \\ y(t_0) & = y_0, \end{cases} \tag{8.2}$$

où y_0 est un élément de $\mathbb{R}^d$, b est une fonction de I dans $\mathbb{R}^d$ et A est une fonction de I dans $\mathbb{R}^{d \times d}$, l'espace des matrices carrées de taille d.

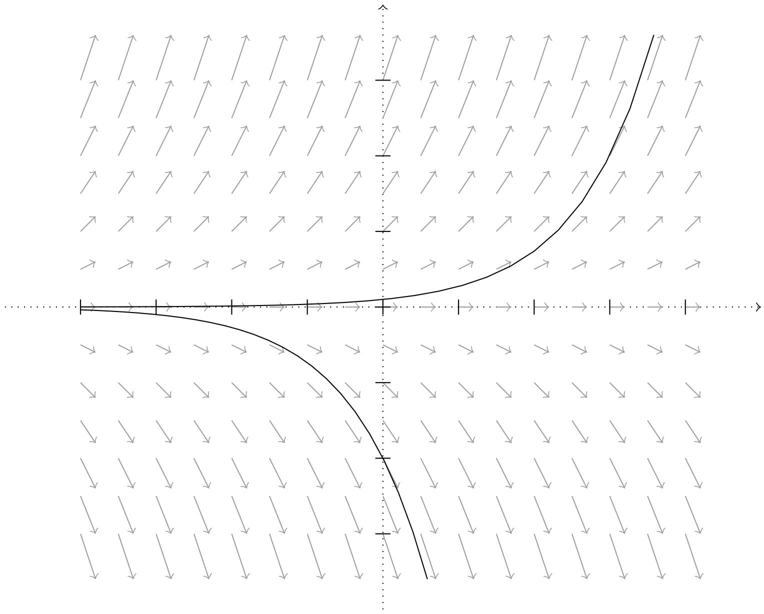

FIGURE 8.1 – Le champ de vecteur associé à l'équation $y' = y$, avec deux solutions.

8.1.1 Théorème de Cauchy-Lispchitz

La résolution de l'équation (8.2) va être liée à la résolution de l'équation suivante, appelée équation *homogène* associée à (8.2) :

$$\begin{cases} y'(t) & = A(t)y(t), \\ y(t_0) & = y_0, \end{cases} \tag{8.3}$$

On a le résultat suivant, selon lequel le système (8.2) définit sans ambuiguïté une fonction y.

Théorème 8.1.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *On suppose que les fonctions A et b sont* continues *sur I et que $t_0 \in I$ est fixé. Alors :*

- *Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, le système* (8.2) *admet une unique solution y définie sur I tout entier. Par ailleurs, si $\tilde{y}$ est une solution définie sur un sous-intervalle $J \subset I$, alors y et $\tilde{y}$ coïncident sur J. Ce résultat vaut également pour* (8.3) *qui n'est que le cas particulier $b = 0$ de* (8.2).
- *L'ensemble $\mathcal{S}_{A,0}$ des solutions de l'équation homogène $y'(t) = A(t)y(t)$ est un espace vectoriel, et l'application $y_0 \mapsto y$ qui à une condition initiale y_0 associe la solution y de* (8.3) *est un isomorphisme entre $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{S}_{A,0}$.*
- *L'ensemble $\mathcal{S}_{A,b}$ des solutions de l'équation $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ est un espace affine dirigé par $\mathcal{S}_{A,0}$. Autrement dit, si $\tilde{y} \in \mathcal{S}_{A,b}$, alors on a $\mathcal{S}_{A,b} = \{\tilde{y} + y,\ y \in \mathcal{S}_{A,0}\}$.*

On remarque notamment que la solution n'est unique que pour une condition initiale donnée. Deux conditions initiales différentes pourront mener à deux solution différentes. Par ailleurs, si on connaît toutes les solutions de $y'(t) = A(t)y(t)$, il suffit pour trouver toutes les solutions de l'équation $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ d'exhiber *une* solution de cette équation. Les autres solutions s'en déduisent en ajoutant les solutions de $y'(t) = A(t)y(t)$.

Démonstration. Si y et z sont dans $\mathcal{S}_{A,0}$, alors on a bien $(y + z)'(t) = A(t)(y(t) + z(t))$. De même, si $\lambda \in R$, on a bien $(\lambda y)'(t) = A(t)(\lambda y)(t)$. Les fonction $y + z$ et λy sont bien dans $\mathcal{S}_{A,0}$, qui est donc un espace vectoriel.

Si y et z sont dans $\mathcal{S}_{A,b}$, alors on a

$$(y - z)'(t) = (A(t)y(t) + b(t)) - (A(t)z(t) + b(t)) = A(t)(y(t)z(t)).$$

La fonction $y - z$ est donc dans $\mathcal{S}_{A,0}$. Autrement dit $\mathcal{S}_{A,b}$ est un espace affine dirigé par $\mathcal{S}_{A,0}$.

L'existence et l'unicité de la solution pour une condition initiale donnée seront montrées dans la partie suivante, sous l'hypothèse supplémentaire que les matrices $A(t)$ commutent.

Si on admet l'unicité pour l'équation homogène, on voit que la solution dépend linéairement de la condition initiale sur les relations $(y + z)(t_0) = y_0 + z_0$ et $(\lambda y)(t_0) = \lambda y_0$. □

8.1.2 Exponentielles de matrice

Pour montrer l'existence et l'unicité des solutions de (8.1), on va avoir besoin de la notion suivante :

Propriété 8.1.2. *Soit A une matrice carrée. Pour tout $1 \leq i, j \leq d$, la série $\sum \frac{1}{n!}(A^n)_{ij}$ est convergente. La matrice e^A définie par*

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \tag{8.4}$$

est appelée exponentielle de la matrice A.

Démonstration. Notons $\|A\| = \max_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |A_{ij}|$. On a

$$\begin{aligned} \|AB\| = \max_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left| \sum_{k=1}^{d} A_{ik} B_{kj} \right| \leq \max_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} |A_{ik}||B_{kj}| &= \max_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} |A_{ik}| \left(\sum_{j=1}^{d} |B_{kj}| \right) \\ &\leq \left(\max_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} |A_{ik}| \right) \left(\max_{k=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |B_{kj}| \right) \\ &= \|A\| \times \|B\|. \end{aligned}$$

Notamment, pour tout n, on a $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. De plus, on remarque que pour tout i, j, on a $|A_{ij}| \leq \|A\|$. On peut donc faire la majoration

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} (A^n)_{ij} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = e^{\|A\|} < \infty.$$

Par conséquent, la série définissant le (i, j)-ème coefficient de la matrice e^A est absolument convergente, de sorte que la définition de e^A a bien un sens. □

La propriété $e^{x+y} = e^x e^y$ ne reste pas valable en toute généralité pour les exponentielles de matrices. Toutefois, on a le résultat suivant :

Propriété 8.1.3. *Si A et B sont deux matrices qui commutent (c'est-à-dire si $AB = BA$), alors on a*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Démonstration. Comme les matrices A et B commutent, on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n!}(A+B)^n - \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} B^n\right) &= \sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!} - \sum_{0 \le n,k \le N} \frac{A^k B^n}{k!n!} \\ &= \sum_{k=0}^{2N}\sum_{n=0}^{2N-k} \frac{A^k B^n}{k!n!} - \sum_{0 \le n,k \le N} \frac{A^k B^n}{k!n!} \\ &= \sum_{\substack{N<n,k\le 2N \\ n+k \le 2N}} \frac{A^k B^n}{k!n!}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

Par conséquent, d'une part le membre de gauche de (8.5) converge vers $e^{A+B} - e^A e^B$, d'autre part les coefficients du membre de droite sont majorés par

$$\sum_{\substack{N<n,k\le 2N \\ n+k \le 2N}} \frac{\|A\|^k \|B\|^n}{k!n!} \le \sum_{k=N}^{\infty}\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\|A\|^k \|B\|^n}{k!n!} \to_N 0.$$

On a donc bien $e^{A+B} = e^A e^B$. De plus, e^{A+B} est symétrique en A et B, donc $e^A e^B = e^B e^A$. □

En dimension 1, la fonction exponentielle est égale à sa dérivée, ce qui peut s'écrire $e^{x+h} = e^x + he^x + o(h)$, pour x un réel, quand h tend vers 0. Cette propriété admet la généralisation suivante pour les matrices :

Propriété 8.1.4. *Si $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices convergeant vers 0, alors la suite de terme général*

$$\frac{e^{H_n} - I_d - H_n}{\|H_n\|}$$

converge vers 0.

Plus généralement, si A est une matrice, et si $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrice convergeant vers 0 telle que $AH_n = H_n A$ pour tout n, alors

$$\frac{e^{A+H_n} - e^A - H_n e^A}{\|H_n\|} \tag{8.6}$$

tend vers 0.

Le fait que (8.6) tende vers 0 est à comprendre comme $e^{A+H} = e^A + He^A + o(H)$ si H est petit et commute avec A.

Démonstration. Par définition de l'exponentielle, on a

$$\left\| \frac{e^{A_n} - I_d - A_n}{\|A_n\|} \right\| = \left\| \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q!} \frac{A_n^q}{\|A_n\|} \right\| \leq \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q!} \|A_k\|^{q-1} = \frac{e^{\|A_n\|} - 1 - \|A_n\|}{\|A_n\|} \to_n 0.$$

La deuxième partie s'obtient en multipliant par e^A. Le fait que A et H_n commutent est utilisé pour remplacer $e^A e^{H_n}$ par e^{A+H_n}. □

Corollaire 8.1.5. *Si les* $(A(t))_{t\in I}$ *commutent, la fonction* $t \mapsto e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$ *a pour dérivée*

$$t \mapsto A(t)e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} A(t).$$

Démonstration. Comme les $(A(t))_{t\in I}$ commutent, alors $\int_{t_0}^t A(s)ds$ commute avec $\int_t^{t+h} A(s)ds$ et de plus $\int_t^{t+h} A(s)ds$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} &= e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} + e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \int_t^{t+h} A(s)ds + o(h) \\ &= e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} + e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} hA(t) + o(h). \end{aligned}$$

□

Attention : si les $A(t)$ ne commutent pas, le résultat du corollaire 8.1.5 n'est plus vrai : la fonction $t \mapsto e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$ est toujours dérivable, mais l'expression de sa dérivée est plus complexe.

8.1.3 Formule de Duhamel

Propriété 8.1.6. *Si les* $(A(t))_{t\in I}$ *commutent, l'équation* (8.3) *admet une unique solution donnée par*

$$\forall t \in I,\ y(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} y_0. \tag{8.7}$$

Démonstration. On déduit du corollaire 8.1.5 que

$$\left(e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} y_0 \right)' = A(t) e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} y_0,$$

ce qui montre que la fonction $t \mapsto e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} y_0$ est une solution de (8.3).

Passons à l'unicité. On considère une solution y, et on va montrer que cette solution est forcément égale à (8.7). On a, en utilisant le fait que y est solution :

$$\left(e^{-\int_{t_0}^t A(s)ds} y(t) \right)' = -A(t)e^{-\int_{t_0}^t A(s)ds} y(t) + e^{-\int_{t_0}^t A(s)ds} y'(t) = e^{-\int_{t_0}^t A(s)ds} \left(-A(t)y(t) + y'(t) \right) = 0.$$

Par conséquent, $e^{-\int_{t_0}^t A(s)ds}y(t)$ est constant. Or, sa valeur en $t = t_0$ est y_0. On a donc

$$e^{-\int_{t_0}^t A(s)ds}y(t) = y_0,$$

d'où $y(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}y_0$, ce qui entraîne l'unicité. □

L'équation (8.7) est en fait une expression explicite de l'isomorphisme entre $\mathbb{R}^d$ et l'espace $\mathcal{S}_{A,0}$ des solutions de l'équation homogène : $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$ est la matrice de l'application qui à une condition initiale associe la solution au temps t.

Maintenant que l'on a construit les solutions de $y' = Ay$, on va chercher à en déduire les solutions de $y' = Ay + b$. Une méthode est la méthode dite de la "variation de la constante", qui consiste à remplacer le vecteur constant y_0 dans l'expression $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}y_0$ par un vecteur non-constant. On cherche donc une solution de $y' = Ay + b$ sous la forme $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}\tilde{y}_0(t)$. La question est : quelles conditions doit satisfaire $\tilde{y}_0(t)$ pour que $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}\tilde{y}_0(t)$ soit solution de $y' = Ay + b$? En remplaçant dans l'équation on obtient

$$\left(e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}\tilde{y}_0(t)\right)' = A(t)e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}\tilde{y}_0(t) + b(t),$$

ce qui se récrit

$$A(t)e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}\tilde{y}_0(t) + e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}\tilde{y}_0'(t) = A(t)e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}\tilde{y}_0(t) + b(t),$$

et après simplification, on obtient

$$\tilde{y}_0'(t) = e^{-\int_{t_0}^t A(s)ds}b(t).$$

Enfin, pour satisfaire la condition initiale $y(t_0) = y_0$, comme $y(t_0) = \tilde{y}_0(t_0)$, on doit avoir $\tilde{y}_0(t_0) = y_0$. Au final, on trouve que $\tilde{y}_0$ est donné par

$$\tilde{y}_0(t) = y_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s A(u)du}b(s)ds.$$

La fonction y est donc donnée par

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}\tilde{y}_0(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t A(u)du}b(s)ds, \tag{8.8}$$

ce qui montre l'unicité des solutions de l'équation (8.2). Ensuite, on vérifie sans peine que la fonction y donnée par (8.8) est solution de (8.2).

Ces calculs nous ont donc permis de démontrer le théorème suivant :

Théorème 8.1.7 (Formule de Duhamel, ou "variation de la constante"). *Si les $(A(t))_{t\in I}$ commutent, l'équation* (8.2) *admet une unique solution donnée par*

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t A(u)du}b(s)ds.$$

La famille des $(A(t))_{t\in I}$ commute dans au moins deux cas courants :

— Si $(A(t))_{t\in I}$ est une matrice constante $A(t) = A_0$ pour tout t, alors on a bien $A(t)A(s) = A_0^2 = A(s)A(t)$ et dans ce cas
$$e^{\int_s^t A(u)du} = e^{(t-s)A_0}.$$

— Si le problème est posé en dimension $d = 1$, une matrice $A(t)$ est en fait réduite à un nombre réel, et on a bien $A(t)A(s) = A(s)A(t)$.

8.1.4 Le cas des équations d'ordre supérieur

On appelle équation différentielle d'ordre p une équation de la forme

$$y^{(p)}(t) = A_0y(t) + A_1(t)y'(t) + A_2y''(t) + \ldots + A_{p-1}(t)y^{(p-1)} + b(t), \tag{8.9}$$

où b est une fonction de I dans $\mathbb{R}^d$ et les A_i sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}^{d\times d}$. La variable y vit ici dans $\mathbb{R}^d$. Il est en fait simple de ramener ce type d'équation à une équation d'ordre 1 en augmentant la dimension du problème. En effet, on pose $z = (y, y', \ldots, y^{(p-1)})$. La nouvelle variable z vit alors dans $(\mathbb{R}^d)^p = \mathbb{R}^{dp}$.

On remarque alors que la fonction y est solution de l'équation différentielle (8.9) si et seulement si z est solution de
$$z' = A(t)z + B(t),$$
où les matrices $A(t)$ et $B(t)$ ont la forme

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & I_d & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & I_d \\ A_0(t) & A_1(t) & \ldots & & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

On peut alors appliquer les résultats de la partie précédente pour les équations d'ordre 1. On remarque notamment que la condition initiale $z(t_0) = z_0$ se traduira sur y par une condition de la forme

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0^{(1)}, \ldots, \quad y(n-1)(t_0) = y_0^{(p-1)}$$

où $(y_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(p-1)})$ est un p-uplet fixé d'éléments e $\mathbb{R}^d$.

Par conséquent, un problème de Cauchy sur une équation d'ordre p doit, pour être bien posé, porter sur les valeurs de la fonction et de ses $p-1$ premières dérivées en un point donné :

Théorème 8.1.8. *Soit I un intervalle, soit b une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^d$ et A_0,...,A_{p-1}, p fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^{d\times d}$. Soient $y_0 \in \mathbb{R}^d$,...,$y_{p-1} \in \mathbb{R}^d$ et $t_0 \in I$.*

Alors l'équation (8.9) *avec la condition intiale*

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \ldots y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}$$

admet une unique solution y définie sur I. Par ailleurs, une solution définie sur un sous-intervalle J de I est égale à y sur J.

8.2 Équations à variables séparables

On appelle *équation à variables séparable* une équation de la forme

$$y'(t) = f(y(t))g(t). \tag{8.10}$$

Il n'est pas simple de donner un résultat général d'existence et d'unicité pour ces équations. Toutefois, en récrivant l'équation sous la forme

$$h(y(t))y'(t) = g(t)$$

et en notant H et G des primitives de h et g (que l'on suppose continues), on voit que les solutions de (8.10) sont les fonctions y telles que $H(y(t)) - G(t)$ soit constante.

Par exemple, on souhaite résoudre

$$y' = 2(1 + y^2)t,$$

sous la condition initiale $y(0) = y_0$. On remarque que toute solution vérifie

$$\frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} = 2t,$$

soit

$$\Big(\arctan(y(t))\Big)' = 2t = (t^2 + C)'$$

d'où, en utilisant la condition initiale

$$\arctan(y(t)) = t^2 + \arctan(y_0).$$

On en déduit

$$y(t) = \tan(t^2 + \arctan(y_0)).$$

Cette solution existe sur l'intervalle $] - t_0, t_0[$, où t_0 est donné par $\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan(y_0))}$.

8.3 Exercices

Exercice 8.1.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y = 0, \quad y'' + 2y' + y = 0, \quad y'' + y = 2\cos(t),$$

Exercice 8.2.
Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x' = & y, \\ y' = & -2x + 3y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = & x + y, \\ y' = & -x - y, \end{cases}$$

Exercice 8.3.
Donner les solutions à valeurs dans $]0, \infty[$ de l'équation différentielle

$$y' + y = y^s,$$

où $s > 1$ est un réel fixé. On pourra chercher une équation différentielle satisfaite par $z = y^\alpha$, pour une valeur de α bien choisie.

Exercice 8.4.
Soit $\theta_0 > 0$. Résoudre, en fonction de θ, l'équation différentielle

$$y'' + \theta_0^2 y = \cos(\theta t)$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. On pourra chercher des solutions particulières sous la forme $\lambda \cos(\theta t)$. Interprétation physique ?

Exercice 8.5.
Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $ty' = 2y - 2$.

Exercice 8.6.
Quelles sont les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

où $\sum a_n$ est une série absolument convergente ?

Exercice 8.7.
Donner toutes les solutions des équations différentielles à variable séparables suivantes :

$$y' = \sqrt{|y|} \ ; \ y' = y^2 \ ; \ t^3 y' = -y^3 \ ; \ y' = -t/y.$$

Chapitre 9

Convexité

9.1 Fonctions convexes

Dans toute ce chapitre, sauf mention explicite, I désignera un intervalle *ouvert* de $\mathbb{R}$.

9.2 Définition

Définition 9.2.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est* convexe *si pour tout x et y éléments de I et pour tout λ dans $[0,1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Si $-f$ est convexe, on dit que f est concave.

Cette inégalité exprime le fait que la courbe de f est partout au-dessous de ses arcs (voir figure 9.1).

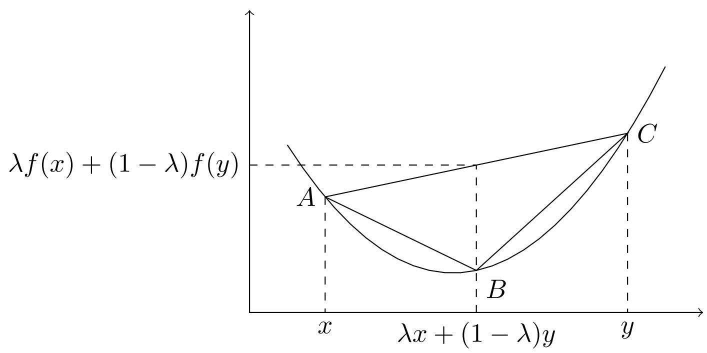

FIGURE 9.1 – Convexité d'une fonction.

En récrivant la définition de convexité, on obtient la proposition suivante, qui traduit le fait que sur la Figure 9.1, les pentes des droites (AB), (AC) et (BC) sont ordonnées dans l'odre croissant.

Propriété 9.2.2 (Inégalité des pentes)**.** *Soit f une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$, et soient $a < b < c$ trois points de I. On a l'inégalité*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Démonstration. L'inégalité $a < b < c$ permet d'écrire b comme un barycentre de a et c, à savoir $b = \lambda a + (1-\lambda)c$, avec $0 < \lambda < 1$. Précisément, il suffit de prendre $\lambda = \frac{b-c}{a-c}$. On a donc, par convexité

$$f(b) = f(\lambda a + (1-\lambda)c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(c) = \frac{b-c}{a-c}f(a) + \frac{a-b}{a-c}f(c).$$

En soustrayant $f(a)$, on arrive à

$$f(b) - f(a) \leq \frac{b-c}{a-c}f(a) - f(a) + \frac{a-b}{a-c}f(c) = \frac{b-a}{a-c}(f(a) - f(c)),$$

et la première inégalité s'obtient en divisant par $b-a$. La deuxième inégalité s'obtient de même en soustrayant $f(c)$ plutôt que $f(a)$. $\square$

9.3 Régularité

La simple hypothèse de convexité d'une fonction permet d'obtenir certains résultats sur sa continuité et sa dérivabilité.

La propriété suivante peut être vue comme un cas limite de l'inégalité des pentes.

Propriété 9.3.1. *Une fonction convexe d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ est dérivable à gauche et à droite en tout point. De plus, on a, pour tout $x < y < z$ de I*

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{(x-y)} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y),$$

où f'_- et f'_+ désignent respectivement les dérivées à gauche et à droite de f. Notamment, les fonctions f'_+ et f'_- sont croissante.

Démonstration. En appliquant l'inégalité des pentes à $x-k < x-h < x < x+h < k+k$, on obtient

$$\frac{f(x-k)-f(x)}{-k} \leq \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(x+k)-f(x)}{k}.$$

Par conséquent, les fonctions $h \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $h \mapsto \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ sont respectivement croissante et décroissante, et respectivement minorée et majorée. Elles admettent donc une limite quand h tend vers 0 en décroissant. La fonction f admet bien des dérivées à gauche et à droite en x. De plus, l'inégalité $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ se déduit en passant à la limite $h \to 0$ dans $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

L'inégalité $f'_-(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ se déduit en passant à la limite $h \to 0$ dans l'inégalité des pentes obtenue avec $x < x+h < y$, à savoir $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. $\square$

Comme une fonction dérivable à gauche et à droite en x est continue en x, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 9.3.2. *Une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$ est continue.*

Attention, dans la propriété 9.3.1 et le corollaire 9.3.2, il est important de supposer l'intervalle I ouvert. En effet, sur un intervalle fermé, une fonction convexe peut ne pas être continue au bord. Par exemple, considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = 0. \end{cases}$$

La fonction f est convexe sur $[0,1]$, et est, comme l'assure le corollaire 9.3.2, continue sur $]0,1[$. Toutefois, cette fonction n'est pas continue en 0 et en 1.

Ces propriétés permettent de caractériser la convexité d'une fonction régulière à partir de ses dérivées.

Propriété 9.3.3.
- *Soit f une fonction dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. La fonction f est convexe si et seulement si la fonction f' est croissante.*
- *Soit f une fonction deux fois dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. La fonction f est convexe si et seulement si la fonction f'' est positive.*

Démonstration.
- Le fait qu'une fonction f convexe et dérivable vérifie f' croissante est une conséquence de la propriété 9.3.1.

  Considérons maintenant une fonction f dérivable dont la dérivée est croissante. On considère également trois points $x < \lambda x + (1-\lambda)y < y$, où $\lambda \in]0,1[$. Le thèorème des accroissements finis nous donne l'existence de $\alpha \in [x, \lambda x + (1-\lambda)y]$ et $\beta \in [\lambda x + (1-\lambda)y, y]$ tels que

  $$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(y)}{\lambda(x-y)} = f'(\beta).$$

  Par croissance de f', on a $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, ce qui se récrit

  $$\lambda f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) \leq (1-\lambda)f(y) - (1-\lambda)f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

  Après manipulation, cette inégalité revient à l'inégalité de la Définition 9.2.1.
- Le deuxième point se déduit du premier en utilisant le fait que la fonction dérivable f' est croissante si et seulement si f'' est positive.

$\square$

La propriété 9.3.3 permet par exemple de montrer que les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexe, ou que la fonction ln est concave.

Il est toutefois possible qu'une fonction convexe ne soit pas dérivable en tout point. Par exemple la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$ sans être dérivable en 0. Il est même possible qu'une fonction convexe ne soit pas dérivable en une infinité de points. Considérons par exemple la fonction $F : x \mapsto \int_0^x [y]dy$, (où $[x]$ désigne la partie entière de x), dont le graphe est tracé en Figure 9.2. La fonction F n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{Z}$, mais est dérivable sur $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$, avec $F'(x) = n$ si $x \in]n, n+1[$. En revanche, F admet une dérivée à gauche et à droite en tout point. Précisément, si x n'est pas entier, on a $F'_+(x) = F'_-(x) = F'(x) = [x]$, alors qu'aux points entiers on a par contre $F'_+(n) = n$ et $F'_-(n) = n-1$.

Plus généralement, l'ensemble des points de non-dérivabilité d'une fonction convexe est dénombrable, et inversement, si E est un ensemble dénombrable, il existe des fonctions convexes dont l'ensemble des points de non-dérivabilité est précisément E.

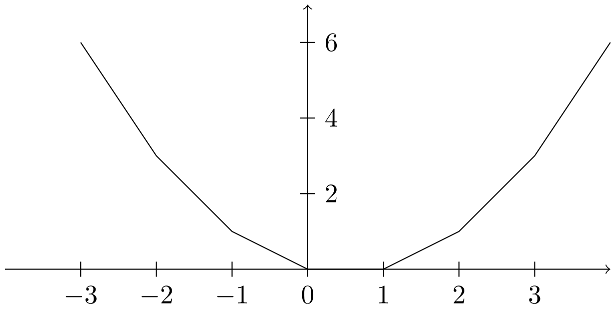

FIGURE 9.2 – Une primitive de la fonction partie entière, dérivable seulement aux valeurs non-entières.

9.4 Exercices

Exercice 9.1.
Montrer les inégalités

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x, \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x, \quad \text{et} \quad \forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x.$$

Soit α un réel positif. Quelle inégalité peut-on écrire pour tout $x > -1$ entre $(1+x)^\alpha$ et $1 + \alpha x$?

Exercice 9.2.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et soit $x \in I$. Montrer que si $f'_-(x) \leq a \leq f'_+(x)$, alors pour tout y dans I, on a $a(y-x) + f(x) \leq f(y)$. En déduire l'expression :

$$f(x) = \sup_{\substack{a,b \text{ t.q.} \\ \forall y,\ ay+b \leq f(y)}} \{ax + b\}.$$

Autrement dit, une fonction convexe peut s'écrire comme le supremum de toutes les fonctions affines qui lui sont inférieures.

Exercice 9.3.
Soient f et g deux fonction continues et bornées de I dans $\mathbb{R}$, et soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose $\int_I g(x)dx = 1$. Montrer l'*inégalité de Jensen* :

$$\Phi\left(\int_I f(x)g(x)dx\right) \leq \int_I \Phi(f(x))g(x)dx.$$

On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 9.4.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose également que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur I. Soit x_0 tel que $f(x_0) > 0$.

1. Soit $y \in I$, avec $\alpha \leq y$. Montrer l'inégalité

$$\alpha \leq y - \frac{f(y)}{f'(y)} \leq y.$$

2. En déduire que la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ définit bien une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par α.
3. En déduire que $\lim_n x_n = \alpha$.

Exercice 9.5.
Soient $p > 1$ et $q > 1$ deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et soient a et b deux réels positifs. Montrer l'inégalité suivante, dite *inégalité de Young* : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Indication : $ab = e^{\ln(ab)}$.

Exercice 9.6.
Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ deux fonction continues positives. Montrer l'inégalité

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \left(\int_0^1 f(x)^p dx\right)^{1/p} \left(\int_0^1 g(x)^q dx\right)^{1/q}$$

On pourra d'abord supposer $\int_0^1 g(x)^q dx = 1$ et appliquer l'inégalité de Jensen avec $\Phi(x) = x^p$. Autre possibilité : supposer $\int_0^1 f(x)^p dx = \int_0^1 g(x)^q dx = 1$ et appliquer l'inégalité de Young.

Annexe A

Indications pour les exercices

Chapitre 1

Exercice 1.1.
On doit utiliser le fait que $\mathbb{R}$ est Archimédien.

Exercice 1.2.
Pour le premier ensemble les bornes supérieures et inférieures sont 0 et 1. 1 est également un plus grand élément, mais 0 n'est pas un plus petit élément.
Pour le deuxième ensemble, les bornes sont 0 (plus petit élément) et $\sqrt{2}$ (qui n'est pas un plus grand élément).
Pour le troisième ensemble les bornes sont 0 et 1, qui ne sont pas des plus petits/grands éléments..

Exercice 1.6.
Il faut utiliser le fait que $\sup A - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, car $\sup A$ est le plus petit des majorants.

Exercice 1.9.
1. α est bien défini car $G \cap]0, \infty[$ est minoré et non-vide.
2. Si $\alpha > 0$, alors on a forcément $\alpha \in G$. En effet, autrement, il existerait au moins deux élḿents x et y dans $G \cap]\alpha, 2\alpha[$ et on aurait alors $|x - y| \in G \cap]0, \infty[$ (car G est un groupe) ce qui contredirait la définition de α, puisque $|x - y| < \alpha$. Par conséquent $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. Si l'autre inclusion n'est pas vérifiée, on peut trouvers $x \in G \setminus \mathbb{Z}$. Or, si $x \in]k\alpha, k + 1\alpha[$, alors $x - k\alpha$ serait un élément de G contenu dans $]0, \alpha[$, ce qui est contradictoire.
3. Comme $\inf G \cap]0, \infty[= 0$, pour tout ε, il existe $x \in G$ avec $0 < x < \varepsilon$. Par conséquent $\varepsilon\mathbb{Z} \subset G$. Or $\varepsilon\mathbb{Z} \cap [x, x + \varepsilon]$ est non vide.
4. Si λ est rationnel, l'ensemble est de la forme $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$, sinon, il s'agit d'un ensemble dense dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Exercice 2.1.
On construit par récurrence une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $k_{n+1} > k_n$ et $u_{k_n} > n$. La suite $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergeant vers $+\infty$.

Exercice 2.2.
Si on note l la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, pour n assez grand, on a $|u_n - l| < \frac{1}{2}$ ou de manière équivalente $u_n \in]l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}[$. Or dans un ensemble de la forme $]l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}[$ il ne peut y avoir au plus qu'un seul entier.

Exercice 2.3.
On trouve les équivalents suivants :

$$\frac{1}{n} \;\; ; \;\; 8\sqrt{n} \;\; ; \;\; -\frac{1}{2}$$

$$2 \;\; ; \;\; n^{3/2}/\ln n.$$

Exercice 2.4.
Le numérateur est encadré par $x\sum_{k=n}^{2n} k$ et $(n+1)+x\sum_{k=n}^{2n} k$. Or, on a l'expression explicite $\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{3n(n+1)}{2}$. Par conséquent, le numérateur est toujours équivalent à $\frac{3x}{2}n^2$.

Exercice 2.5.
La première suite est bien définie car $2X^2 + X + 2$ n'a pas de racines réelles. Par ailleurs, on voit que u_n est de signe constant (donc $u_n \geq 0$). Enfin, on remarque que $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2+u_n+2u_n^2} \leq \frac{8}{15}u_n$. En conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Pour la deuxième suite, on vérifie que u_0, u_1 et u_2 sont bien définies. Pour $n > 2$, $2\sin(x) + n$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $2u_n+n \neq 0$, et u_{n+1} est bien définie. Pour n grand, $\frac{u_n}{2u_n+n}$ est dans $[-\frac{1}{n-2}, \frac{1}{n-2}]$; on en déduit $u_n \to 0$.

La troisième suite est bien définie car $x \mapsto x + \frac{x^2}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par ailleurs, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. On a donc deux possibilités : ou bien elle tend vers $+\infty$ ou bien elle converge vers une limite λ vérifiant forcément $\lambda = \lambda + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$. Cette deuxième éventualité est impossible. Donc $u_n \to \infty$. On peut même en déduite que $u_n \sim n$.

Exercice 2.6.
Le cas $a = 1$ donne une suite arithmétique. Si $a \neq 1$, on cherche un point fixe de la relation de récurrence, soit λ tel que $\lambda = a\lambda + b$ (on a une unique solution), et on étudie la suite $u_n - \lambda$.

Exercice 2.7.
Les trois suites tendent respectivement vers ∞ (minorée par $\sqrt{n/2}$), vers 0 (majorée par $1/\sqrt{n}$) et 1 ($\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k!$ est majorée par $\frac{n-2}{n(n-1)}$)et $\frac{(k-1)!}{n!} + \frac{n!}{n!}$ tend vers 1).

Exercice 2.8.
L'égalité $v_n \leq v_{2n+1}$ est claire. L'inégalité $v_{2n+1} \leq \frac{1}{2^{1-\alpha}}v_n + 1$ se déduit de l'inégalité précédente en groupant deux par deux les termes de la somme v_{2n+1}. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Or l'inégalité précédente montre qu'elle est majoré. Par conséquent, elle converge.

Exercice 2.9.
On revient à la définition de suites adjacentes. Pour l'approximation de e, si n_0 est tel que $n_0!n_0 > 10^2$ (par exemple, $n_0 = 5$ convient), alors u_{n_0} est une approximation à 10^{-2} près de e. Par exemple, $u_5 = \frac{163}{60} = 2.71666....$

Exercice 2.10.
Il faut une hypothèse supplémentaire pour conclure (penser à $(-1)^n$) : que les deux sous-suites aient la même limite.

Exercice 2.11.
Si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (disons par $M \in \mathbb{N}$), alors $\left(M!\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers qui converge, et sa limite serait alors entière (voir exercice 2.2). Par conséquent, $(q_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas majorée. Si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers ∞, on peut se ramener au cas majoré quitte à extraire une sous-suite, ce qui est contradictoire. Par conséquent, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞. Comme le rapport p_n/q_n converge vers un réel non nul, on en déduite que p_n aussi tend vers $\pm\infty$.

Exercice 2.12.
Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe n_0 tel que $|u_n - \lim u_n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. En séparant sous la forme

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} u_k,$$

on voit que le premier terme tend vers 0, alors que le deuxième est dans $[\lim u_n - \varepsilon, \lim u_n + \varepsilon]$ à partir d'un certain rang.

Un contre-exemple à la réciproque est donné par la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.13.
Si $n = pq + r$, on a, par la relation de sous-additivité,

$$u_n \leq qu_p + u_r \leq qu_p + \max\{u_0, \dots, u_{p-1}\}.$$

On divise ensuite par n.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on choisit ensuite p tel que $\frac{u_p}{p} < \inf \frac{u_n}{n} + \varepsilon$. La relation précédente montre que $\frac{u_n}{n}$ est plus petit que $\inf_m \frac{u_m}{m} + 2\varepsilon$ pour n assez grand. (Cette dernière étape ne marche que pour $\inf \frac{u_m}{m} > -\infty$, dans le cas où la borne inférieure est infinie, il faut remplacer "$\frac{u_p}{p} < \inf \frac{u_n}{n} + \varepsilon$" par "$\frac{u_p}{p} < M$", où M est arbitraire.)

Chapitre 3

Exercice 3.1.
On obtient les résultats suivants :

$$1 \ ; \ \frac{e}{e-1} \ ; \ \text{divergente} \ ;$$

$$0 \ ; \ \frac{\theta - \sin\theta}{4} \ ; \ \text{divergente} \ ;$$

$$\text{divergente} \ ; \ \frac{4 - 2\cos 1}{5 - 4\cos 1} \ ; \ \ln(2) - 1.$$

Exercice 3.2.
Pour le 1., si $\sum u_n$ converge, on a $u_n < 1$ pour n assez grand, et à ce moment-là $u_n^a < u_n$.
Pour le 2., on utilise le 1., en passant par la contraposée (si $\sum u_n^a$ converge, alors $\sum u_n$ converge).
La majoration $\frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$ montre que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ aussi. Inversement, si $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge, alors $\frac{u_n}{1+u_n} \to 0$, ce qui implique $u_n \to 0$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par M, par exemple). On a donc la majoration $u_n < (M+1)\frac{u_n}{1+u_n}$, qui permet de conclure.

Exercice 3.3.
On a $a_n 10^{-n} \leq 9 \times 10^{-n}$, or la série $\sum 9 \times 10^{-n}$ converge (série géométrique).
On a $0.99999... = 1$. Si $0.a_1a_2\ldots = 0.b_1b_2\ldots$, alors, ou bien les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales, ou bien il existe un k tel que $a_i = b_i$ pour $i < k$, $a_k = b_k + 1$, et $a_i = 0$, $b_i = 9$ pour $i > k$ (ou l'inverse).

Exercice 3.4.
Par récurrence, on peut construire une suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $n_0 = 0$, $n_{i+1} > n_i$ et $\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} \frac{u_k}{\sum_{q=0}^{k} u_q} \geq \frac{1}{2}$.
En effet, étant donnée la valeur de n_i, on a

$$\sum_{k=n_i}^{n} \frac{u_k}{\sum_{q=0}^{k} u_q} \geq \sum_{k=n_i}^{n} \frac{u_k}{\sum_{q=0}^{n} u_q} = \frac{\sum_{k=n_i}^{n} u_k}{\sum_{q=0}^{n} u_q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Pour n assez grand, la somme ci-dessus est donc supérieure à $\frac{1}{2}$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{u_k}{\sum_{q=0}^{k} u_q} \geq \frac{i}{2} \underset{i\to\infty}{\to} \infty,$$

et la série diverge.

Exercice 3.5.
1. On a (E désigne la partie entière)

$$\sum_{k=E(n/2)}^{n} u_k \geq \sum_{k=E(n/2)}^{n} u_n \sim \frac{n}{2} u_n.$$

Or

$$\sum_{k=E(n/2)}^{n} u_k \leq \sum_{k=E(n/2)}^{\infty} u_k \to 0.$$

Par conséquent, $nu_n \to 0$.
Un contre-exemple à la réciproque est donné par l'exercice 3.4, appliqué à $u_n = \frac{1}{n}$. En effet, $\sum \frac{1}{n}$ diverge, de sorte que $\sum \frac{1}{n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ aussi. Dans ce cas, on a toutefois quand même $n\frac{1}{n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \to 0$.
2. On écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{k}(u_k - u_{k-1}) = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=q}^{n}(u_k - u_{k-1}) = \sum_{q=1}^{n} u_n - u_{q-1} = nu_n - \sum_{q=1}^{n} u_{q-1},$$

et on conclut avec le résultat précédent. En particulier, les deux séries ont même somme.
3. On a les encadrements

$$\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} u_k \leq ((n+1)^2 - n^2)u_{n^2} \sim 2nu_{n^2}.$$

et

$$\sum_{k=(n-1)^2+1}^{n^2} u_k \geq (n^2 - (n-1)^2)u_{n^2} \sim 2nu_{n^2}.$$

On en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum n u_{n^2}$ converge. De même

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k \leq 2^n u_{2^n}$$

et

$$\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_k \geq \frac{1}{2} 2^n u_{2^n}.$$

Exercice 3.6.
On trouve l'équivalent $u_{n+1} - u_n \sim \frac{-1}{12n^2}$, d'où la convergence absolue. Par conséquent, $u_n = u_1 + \sum_{k=2}^n u_k - u_{k-1}$ converge, de même que e^{u_n}. Le C de l'énoncé est la limite de e^{u_n}.

Exercice 3.7.
On obtient :

div. ; div. ; div. si et seulement si $a < \min(1, b)$; conv.

conv. si et seulement si $a < b$; conv. si et seulement si $a \geq 1$; conv.

Exercice 3.8.
L'équivalent est $\frac{N^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

Exercice 3.9.
La série est convergente, et sa somme vaut $-\ln(2)$.

Exercice 3.10.
La série converge si et seulement si on est dans un des trois cas suivants :
— $\alpha < 1$;
— $\alpha = 1$, $\beta < -1$;
— $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma < -1$.

Exercice 3.11.
La série converge (trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$).

Exercice 3.12.
Une fois l'encadrement montré (suites adjacentes), on suppose que $e = \frac{a}{N}$ avec $a, N \in \mathbb{N}$, on écrit l'encadrement avec ce N-là, puis on multiplie par $N!$.

Exercice 3.13.
On trouve pour équivalent $(t-1)^{-1}$ (faire des comparaisons série/intégrale).

Exercice 3.14.
Le produit de Cauchy diverge (par exemple parce que son terme général ne tend pas vers 0), alors que l'on fait le produit de deux séries convergentes. Cela ne contredit pas la propriété 3.4.4 car la série n'est pas *absolument* convergente.

Chapitre 4

Exercice 4.1.
Les dérivées n-ièmes sont respectivement :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(x+1)^{n+1}} \quad ;$$

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i\sin(\theta)}\left(\frac{1}{(x-e^{i\theta})^{n+1}} - \frac{1}{(x-e^{-i\theta})^{n+1}}\right) \quad ;$$

$$h^{(n)}(x) = \frac{e^x}{2}\left((1+2i)^n e^{2ix} + (1-2i)^n e^{-2ix}\right) \quad ;$$

$$\begin{aligned} k^{(n)}(x) = {} & \frac{(x^2-x)e^{2x}}{2i}((2+i)^n e^{ix} + (2-i)^n e^{-ix}) - inxe^{2x}((2+i)^{n-1}e^{ix} + (2-i)^{n-1}e^{-ix}) \\ & + \frac{n(n-1)}{2i}e^{2x}((2+i)^{n-2}e^{ix} + (2-i)^{n-2}e^{-ix}). \end{aligned}$$

Exercice 4.2.
La première asymptote est la droite d'équation $y = 2 - x$; la courbe est située au-dessous.
La deuxième asymptote est la droite d'équation $y = x$; la courbe est située en-dessus.
La troisième asymptote est la droite d'équation $y = -x + 1/2$; la courbe est située en-dessous.

Exercice 4.3.
Les développements sont les suivants :

$$\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3), \quad \sin(e^x - 1) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3), \quad \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\frac{\ln(\cos(x))}{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3), \quad (\cos(x))^{\sin(x)} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Exercice 4.4.
Le développement est $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 4.5.
Les limites respectives sont :

$$\frac{1}{3},\ 1,\ -\frac{1}{4}\ \text{(à droite) et } \infty \text{ (à gauche)},\ 3,\ 1,\ e^{1/6}.$$

Exercice 4.7.
La limite vaut 1. Pour y arriver, calculer le développement limité à l'ordre 7 d'une expression de la forme $f(g(x)) - g(f(x))$ en 0, où f et g sont deux fonctions admettant pour développements respectifs $x + \alpha x^3 + \beta x^5 + \gamma x^7 + o(x^7)$ et $x + ax^3 + bx^5 + gx^7 + o(x^7)$.

Exercice 4.8.
La suite est bien définie car $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2x}$ est une fonction de $]0, \infty[$ dans lui-même. Par ailleurs, pour

tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{\alpha}$, ce qui entraîne $u_{n+1} \leq u_n$. Par conséquent, la suite est minorée et décroissante à partir du deuxième terme, ce qui fait qu'elle converge. Par continuité de f, la limite $\lim u_n$ doit vérfier $f(\lim u_n) = \lim u_n$, de sorte que $\lim u_n = \sqrt{\alpha}$.
On a la majoration $u_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{(u_n - \sqrt{\alpha})^2}{2u_n} \leq C(u_n - \alpha)^2$, qui donne $C(u_{n+1} - \sqrt{\alpha}) \leq (C(u_n - \sqrt{\alpha}))^2$. Par conséquent, pour $u_0 \geq \sqrt{\alpha}$, on a

$$|u_n - \sqrt{\alpha}| \leq \frac{1}{C}(C|u_0 - \sqrt{\alpha}|)^{2^n}. \tag{A.1}$$

Cette méthode fournit donc une méthode très efficace pour calculer des racines carrées : il s'agit de la *méthode de Héron*, connue depuis l'Antiquité. La majoration (A.1) montre en particulier qu'à chaque itération, le nombre de chiffres exacts après la virgule est environ multiplié par deux. On dit que la vitesse de convergence est *quadratique*.

Exercice 4.9.
On trouve les équivalents $a_n \sim \frac{1}{n}$ et $b_n \sim \log(n)$.

Exercice 4.18.
On écrit $f(x) = \frac{1}{2}\left(\int_a^x f'(t)dt - \int_x^b f'(t)dt\right)$.

Exercice 4.19.
On exprime $f(x+h)$ à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. On applique alors l'inégalité obtenue à un h bien choisi.

Exercice 4.20.
Utiliser le théorème de Rolle en faisant attention aux multiplicités des racines.

Exercice 4.21.
Les deux suites convergent respectivement vers $\frac{1}{2}f'(0)$ et $\ln(2)f'(0)$.

Chapitre 5

Exercice 5.1.
Les valeurs sont, dans l'ordre :

$$\ln\left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right), \quad 0, \quad \ln(3)/2, \quad 2\sqrt{3} - 2/3,$$

$$a\ln(a) - a, \quad a\arcsin(a) + \sqrt{1-a^2} - 1, \quad \frac{\pi^2}{32}, \quad \frac{a^3}{3}\arctan(a) - \frac{a^2}{6} - \frac{1}{6}\ln(1+a^2), \quad 2\ln(2) - \frac{3}{4}, \quad \arctan(e^a) - \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^a}, \quad (3 - 2a + 2a^2)\frac{e^{2a}}{4} - \frac{3}{4}, \quad (a^2+3)\sin(a) + 2a\cos(a), \quad 0, \quad \pi\frac{(b-a)^2}{8}.$$

Exercice 5.2.
Des équivalents sont, dans l'ordre :

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \ln(2), \quad \frac{\pi}{4}, \quad 2e^{\pi/2-2}.$$

Exercice 5.3.
On écrit l'intégrale comme limite de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\alpha+\alpha^2\right)$$

et on utilise la factorisation

$$X^{2n}-1=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{ik\pi/n})(X-e^{-ik\pi/n})=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X+1).$$

On trouve que l'intégrale recherchée vaut 0 pour $\alpha\in]-1,1[$ et $2\pi\ln\alpha$ pour $|\alpha|>1$.

Exercice 5.4.
La majoration $\left(\int_a^b f^n(x)\right)^{1/n}\leq \sup f+\varepsilon$ à partir d'un certain rang s'obtient en majorant directement f. Pour obtenir une minoration de l'intégrale par $\sup f-\varepsilon$ (à partir d'un certain rang), on trouve un intervalle sur lequel f est minorée par $\sup f-\frac{\varepsilon}{2}$.

Exercice 5.5.
Pour le 1. on intègre deux fois par parties. Pour le 2., on applique la formule du 1. pour les valeurs $a=\frac{k-1}{n}$ et $b=\frac{k}{n}$. On majore finalement par $\sup|f''|\frac{1}{2n^2}$.

Exercice 5.7.
Dans l'ordre :

$$\frac{1}{\alpha+1}\text{ si }\alpha>1\text{ sinon div.},\quad \frac{-1}{\alpha+1}\text{ si }\alpha<1\text{ sinon div.},\quad\text{divergente},\quad\text{divergente},\quad\text{divergente},$$
$$\pi,\quad 1,\quad -1,\quad\text{divergente},\quad\text{divergente},\quad\text{divergente}.$$

Exercice 5.8.
Quelques indications :

1. (a) On trouve $(n+1)I_n=(n+2)I_{n+2}$.
   (b) On utilise le fait que $I_0=\pi$ et $I_1=1$.
   (c) La question 1a montre que $I_n\sim I_{n+2}$. On conclut avec $I_n\leq I_{n+1}\leq I_{n+2}$.
2. (b) On prouve d'abord que $\int_0^M\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$ converge vers $\int_0^M e^{-x/2}dx$ pour tout M, puis on utilise le fait que $\int_M^\infty e^{-x/2}dx$ peut être rendu arbitrairement petit.
   (c) On pose $x=\sqrt{n}\cos(t)$.

Exercice 5.9.
L'egalité $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ se montre par une intégration par partie.

Chapitre 6

Exercice 6.1.
La suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-1,1]$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $]-1+\varepsilon,1-\varepsilon[$, pour $\varepsilon>0$.

La suite $(\frac{nx}{1+nx})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et uniformément sur tout intervalle de la forme $[a,\infty[$ ou $]-\infty,-a]$, avec $a>0$.
La suite $(\frac{1+nx}{n^2+x^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a,a]$, avec $a>0$.

Exercice 6.2.
La série $\sum e^{-nx}$ converge simplement sur $]0,\infty[$, et uniformémet et normalement sur tout intervalle de la forme $]\varepsilon,\infty[$.
La série $\sum \frac{1}{1+x^2n^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et uniformément et normalement sur tout ensemble de la forme $\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]$.
La série $\sum \frac{1}{n^2+x^2}$ converge simplement, uniformément et normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.3.
On écrit $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ comme $\exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$. Puis on utilise une formule de Taylor pour majorer l'erreur entre $n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ et x.

Exercice 6.4.
Pour avoir convergence uniformé, on doit avoir P_n-P_{n+1} bornée à partir d'un certain rang. Or un polynôme borné est constant, par conséquent, le degré de P_n ne change plus à partir d'un certain rang.

Exercice 6.5.
Pour montrer la convergence uniforme, on peut montrer une convergence normale.
L'encadrement (obtenu par comaraison série/intégrale) fournit un équivalent $f\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\sim 2N$ (on a utilisé $\int_0^\infty e^{-\sqrt{y}}dy=2$). Par décroissance de f, on a donc $f(x)\sim 2x^{-2}$.

Exercice 6.6.
La première égalité se montre en développant $x^{-x}=e^{-x\ln(x)}$ à l'aide de la série exponentielle, puis en intervertissant la série et l'intégrale (en la justifiant !).
L'expression intégrale de $n!$ se montre par récurrence.

Exercice 6.7.
La série converge pour tout x car $\frac{1}{(x-n)^2}\sim\frac{1}{n^2}$.
La convergence uniforme peut se montrer à partir de la convergence normale (le maximum de $\frac{1}{(x-n)^2}$ sur $[k+\varepsilon,k+1-\varepsilon]$ est atteint en un des deux points $k+\varepsilon$ et $k+1-\varepsilon$).

Exercice 6.8.
La convergence peut se montrer par une comparaison série/intégrale.
La convergence uniforme de $\sum\frac{\ln(n)^k}{n^x}$ peut s'obtenir en majorant $\frac{\ln(n)^k}{n^x}$ par $\frac{1}{n^{x-\eta}}$ pour η suffisamment petit.
La régularité de ζ se déduit du théorème de dérivation d'une limite de fonctions.
L'encadrement est une comparaison série/intégrale.

Exercice 6.9.
Il s'agit du théorème de dérivation d'une limite de fonctions. L'expression de c_n s'obtient en intervertissant le passage à la limite dans la série et l'intégrale.

Exercice 6.10.

On obtient les expressions suivantes (avec rayon de convergence) :

$$\frac{1}{1-ze}+\frac{1}{1-\frac{z}{e}},\ R=e^{-1}\ ;\ \frac{1-z\cos(1)}{1-2\cos(1)+z^2},\ R=1\ ;\ (1-z)\ln(1-z),\ R=1\ ;\ \frac{-\ln(1-z)}{1-z},\ R=1.$$

Exercice 6.11.
Les rayons de convergence sont donnés respectivement par :

$$e^{-1},\ 4,\ 27,\ e^{-1}.$$

Exercice 6.12.
Le rayon de convergence est $(\sqrt{5}-1)/2$. La somme de la série est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{1-z-z^2}.$$

Exercice 6.13.
Les développement en séries entières sont les suivants :

$$\sum \frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2(n!)}x^n, \quad -2\sum_{n \text{ pair}} x^n - \sum_{n \text{ impair}} x^n,$$

$$\sum \frac{1}{3}\left((-\frac{1}{2})^{n+1}-1\right)x^n, \quad \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+2)}x^{4n+2}.$$

Exercice 6.14.
L'unique solution développable en série entière en 0 est

$$\sum \frac{(-1)^n}{(4n^2+1)}t^{2n}.$$

Chapitre 7

Exercice 7.1.
On a :

$$\cos(2x)\sin(3x) = \sin(x)(2\cos(x)^2-1)(4\cos(x)^2-1),$$
$$\cos(4x) = 8\cos(x)^4 - 8\cos(x)^2 + 1,$$
$$\sin(5x) = 16\sin(x)^5 - 20\sin(x)^3 + 5\sin(x).$$

Exercice 7.2.
On a :

$$\cos(2x-y)\sin(x+y) = ((\cos(x)^2-\sin(x)^2)\cos(y)+2\sin(x)\cos(x)\sin(y))(\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)),$$

$$\cos(3x+y) = (4\cos(x)^3 - 3\sin(x))\cos(y) - (3\sin(x) - 4\sin(x)^3)\sin(y)$$
$$\sin(x-y) = (\cos(y)\sin(x) - \sin(y)\cos(x).$$

Exercice 7.3.
On a :

$$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3),\\ \sin^3(x) &= \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x)),\\ \cos(x)^3\sin^2(x) &= \frac{1}{16}(2\cos(x) - \cos(3x) - \cos(5x)).\end{aligned}$$

Exercice 7.4.
On obtient respectivement les expressions suivantes :

$$\frac{\tan(x)}{2\tan^2(x)+1},\quad \frac{1+\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)-\tan^4(x)},\quad \frac{1-\tan^3(x)}{(1+\tan^2(x))^2}.$$

Exercice 7.5.
En posant $t = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on obtient respectivement :

$$\frac{1-t^4}{1+2t-2t^2+2t^3+t^4},\quad \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} + \frac{2}{1+t^2},\quad \frac{2t}{1-2t-t^2}.$$

Exercice 7.6.
On trouve les valeurs suivantes :

$$\frac{1}{2}\ln(3),\quad \frac{1}{2}\ln(2),\quad \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2\tan(a)+1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right),\quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Chapitre 8

Exercice 8.1.
On trouve les solutions (α et β sont des réels quelconques) :

$$y(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t),\quad y(t) = \alpha e^{-t} + \beta t e^{-t},\quad y(t) = t\sin(t) + \alpha\sin(t) + \beta\cos(t).$$

Exercice 8.2.
Les solutions sont, pour α, β des réels quelconques :

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t + \beta\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t},\quad \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}t\\1-t\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 8.3.
Pour $\alpha = 1 - s < 0$ on trouve que $z = y^\alpha$ satisfait l'équation :

$$z' + (1-s)z = (1-s),$$

de sorte que $z(t) = 1 + \lambda e^{(s-1)t}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Les solutions de l'équation initiale sont donc les $y = \left(1 + \lambda e^{(s-1)t}\right)^{1/(1-s)}$, avec $\lambda \in]-1, \infty[$ (on ne considère que les solutions à valeurs positives). Le domaine de définition de ces solutions est $\mathbb{R}$ si $\lambda \geq 0$, ou $]-\infty, \frac{\ln(-\lambda)}{1-s}[$ sinon.

Exercice 8.4.
Pour $\theta \neq \theta_0$, on trouve la solution :

$$y(t) = \frac{\cos(\theta t) - \cos(\theta_0 t)}{\theta_0^2 - \theta^2}.$$

Pour $\theta = \theta_0$, on trouve

$$y(t) = \frac{t}{2\theta_0} \sin(\theta_0 t).$$

Cela illustre le concept de *résonance* : $y(t)$ représente la position à l'instant t d'un oscillateur de fréquence θ_0 (à cause des termes $y'' + \theta_0^2 y$), initialement au repose (à cause des conditions $y(0) = y'(0) = 0$) et perturbé avec une fréquence θ (à cause du terme $\cos(\theta t)$). On voit que plus la fréquence perturbatrice θ est proche de la fréquence caractéristique θ_0 plus les oscillations seront grandes.

Exercice 8.5.
On trouve $y(t) = 1 + \lambda t^2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque notamment que toutes les solutions admettent 1 pour limite en $t \to 0$: on ne peut pas imposer une condition initiale en 0.

Chapitre 9

Exercice 9.1.
On peut montrer toutes ces inégalités par des études de fonctions. Toutefois, la convexité permet de les "expliquer" :

— sin est concave sur $[0, \pi/2]$, or les fonctions x et $2x/\pi$ sont respectivement une tangente et une corde de sin ;
— l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, et $1 + x$ en est une tangente ;
— $\ln(1 + x)$ est concave sur $]-1, \infty[$, et x est une tangente de cette fonction.

Exercice 9.3.
On écrit $a \int_I f(x)g(x)dx + b = \int_I (af(x) + b)g(x)dx$, puis on passe à la borne supérieure comme dans l'exercice 9.2.

Exercice 9.5.
On écrit $ab = e^{\ln(ab)} = e^{\frac{1}{p} p \ln a + \frac{1}{q} q \ln b}$, puis on utilise la convexité de l'exponentielle avec les coefficients $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$.