

Interrogation du 10 décembre 2018

Durée : 1 heure 30

Questions de cours

1. Donner la définition de la variance d'une variable aléatoire réelle.
2. Donner, avec justification, la moyenne et la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
3. Tracer la fonction de répartition d'une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 3) = 1/4$.
4. Donner, avec justification, la moyenne d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.

Exercice 1

On dispose de trois urnes \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 et \mathcal{U}_3 . On sait que :

- L'urne \mathcal{U}_1 contient 1 boule rouge et 4 boules noires ;
- L'urne \mathcal{U}_2 contient 8 boules rouges et 2 boules noires ;
- L'urne \mathcal{U}_3 contient 2 boules rouges et 2 boules noires.

1. On choisit une urne au hasard parmi les trois, puis on tire une boule dans cette urne.
 - (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
 - (b) On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée dans l'urne \mathcal{U}_1 ? dans l'urne \mathcal{U}_2 ? dans l'urne \mathcal{U}_3 ?
2. On regroupe toutes les boules dans une même urne, de laquelle on tire une boule.
 - (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
 - (b) On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité que cette boule vienne initialement de l'urne \mathcal{U}_1 ? de l'urne \mathcal{U}_2 ? de l'urne \mathcal{U}_3 ?

Exercice 2

Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ , et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p . On suppose que N est indépendante de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Quelle est la loi de la variable $Y = \sum_{i=1}^N X_i$? On pourra appliquer la formule des probabilités totales avec la partition $(\{N = n\})_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Quelle est la loi de $N - Y$?
3. Les variables Y et $N - Y$ sont-elles indépendantes ?