Interrogation du 10 décembre 2018 : corrigé

Exercice 1

1. Pour cette première expérience, on dispose des évènements suivants : pour $i = 1, 2, 3$, on note par U_i l'évènement *"On a choisit l'urne $\mathcal{U}_i$"*, et on note R l'évènement *"La boule tirée est rouge"*. Les conditions de l'énoncé nous donnent

$$\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \mathbb{P}(U_3) = 1/3,$$

ainsi que

$$\mathbb{P}_{U_1}(R) = 1/5, \quad \mathbb{P}_{U_2}(R) = 8/10 = 4/5 \text{ et } \mathbb{P}_{U_3}(R) = 2/4 = 1/2.$$

(a) La formule des probabilités totales nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(R) + \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}_{U_2}(R) + \mathbb{P}(U_3)\mathbb{P}_{U_3}(R)\\ &= 1/3 \times 1/5 + 1/3 \times 4/5 + 1/3 \times 1/2 = 1/2.\end{aligned}$$

(b) On utilise ici la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_R(U_1) = \mathbb{P}_{U_1}(R)\frac{\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(R)} = 1/5 \times \frac{1/3}{1/2} = 2/15.$$

De même, on trouve $\mathbb{P}_R(U_2) = 8/15$ et $\mathbb{P}_R(U_3) = 1/3$. Remarque : la somme $\mathbb{P}_R(U_1) + \mathbb{P}_R(U_2) + \mathbb{P}_R(U_3)$ vaut bien 1.

2. Dans cette expérience, on notera $\tilde{R}$ l'évènement *"La boule tirée est rouge"* et $\tilde{U}_i$ l'évènement *"La boule tirée provient de l'urne $\mathcal{U}_i$"*.

(a) Cette fois-ci, on effectue un seul tirage, par conséquent, la probabilité de tirer une boule rouge est le rapport du nombre de boules rouge sur le nombre total de boules soit $(1 + 8 + 2)/(5 + 10 + 4) = 11/19$.

(b) La définition de la probabilité conditionnelle donne $\mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_1) = \frac{\mathbb{P}(\tilde{U}_1 \cap \tilde{R})}{\mathbb{P}(\tilde{R})}$. Les conditions de l'énoncé donnent

$$\mathbb{P}(\tilde{U}_1 \cap \tilde{R}) = \frac{\text{nombre de boules rouge dans } \mathcal{U}_1}{\text{nombre total de boules}} = 1/19,$$

d'où

$$\mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_1) = 1/19 \times 19/11 = 1/11.$$

De même

$$\mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_2) = 8/19 \times 19/11 = 8/11 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_3) = 2/19 \times 19/11 = 2/11.$$

On aurait aussi pu remarquer que $\mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_i)$ est donné par le rapport $\frac{\text{nombre de boules rouges dans } \mathcal{U}_i}{\text{nombre de boules rouges}}$.

Exercice 2

1. On utilise la formule des probabilités totales avec la partition $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{N = n\}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\{Y = k\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}\{N = n\}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y = k, N = n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y = k|N = n)\mathbb{P}(N = n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i = k \,\middle|\, N = n\right)\mathbb{P}(N = n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i = k\right)\mathbb{P}(N = n).\end{aligned}$$

La dernière égalité découle de l'indépendance de N et des (X_i). Ensuite, on utilise le fait que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale de paramètres (n,p) pour obtenir :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!} e^{(1-p)\lambda}$$
$$= \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^k}{k!}.$$

Autrement dit, Y suit la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

2. On a l'egalité $N - Y = \sum_{i=1}^{N}(1-X_i)$. Or, les $1-X_i$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1-p$. Par conséquent, on est dans les hypothèses de la question 1, et on en déduit que $N-Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $(1-p)\lambda$.

3. On a, pour deux entiers k et q,

$$\mathbb{P}(Y=k, N-Y=q) = \mathbb{P}(Y=q, N=q+k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{q+k} X_i = q, N=q+k\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{q+k} X_i = q\right)\mathbb{P}(N=q+k)$$

La dernière égalité utilise l'indépendance de N et des (X_i). Ensuite, comme N est de loi de Poisson et $\sum_{i=1}^{q+k} X_i$ est de loi binomiale, on a

$$\mathbb{P}(Y=k, N-Y=q) = \binom{q+k}{q} p^q (1-p)^k \frac{e^{-\lambda}\lambda^{q+k}}{(q+k)!} = e^{-\lambda}\left(\frac{(1-p)^k\lambda^k}{k!}\right) \times \left(\frac{p^q\lambda^q}{q!}\right).$$

Comme $P(Y=k, N-Y=q)$ a la forme d'un produit d'une fonction de q et d'une fonction de k, on en déduit que Y et $N-Y$ sont indépendantes. Au passage, cette écriture aurait aussi permis de déduire que Y et $N-Y$ suivent des lois de Poisson.