Interrogation du 11 mars 2019

Durée : 1 heure 30

Questions de cours

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de $-\ln U$? On justifiera la réponse.
2. Calculer la moyenne et la variance d'une variable aléatoire de loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$.

Exercice 1

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit la variable $X = \max(U,V)$.

1. Calculer la fonction de répartition de la variable X.
2. Montrer que X admet une densité que l'on explicitera.

Exercice 2

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$ admettant les densités respectives f_1, f_2 et f_3 définies pour $x \in [0,1]$ par $f_1(x) = c_1x^2$, $f_2(x) = c_2x(1-x)$ et $f_3(x) = c_3(1-x)^2$.

1. Donner les valeurs de c_1, c_2 et c_3.
2. Soit I une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1,2,3\}$, indépendante des X_i. Quelle est la loi de X_I ?

Exercice 3

1. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, de densité $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.
   (a) Montrer que $e^{\lambda X}$ est intégrable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et vérifie $\mathbb{E}e^{\lambda X} = e^{\lambda^2/2}$.
   (b) Montrer que pour $t > 0$, on a $\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-t^2/2}$ (on pourra considérer la quantité $\mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t})$ pour une valeur de λ bien choisie).
2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$.
   (a) Que vaut $\mathbb{E}e^{\lambda X_i}$?
   (b) Montrer que les X_i vérifient $\mathbb{E}e^{\lambda X_i} \leq e^{\lambda^2/2}$ (on pourra étudier la dérivée seconde en λ de $\ln \mathbb{E}e^{\lambda X_i}$).
   (c) En déduire la majoration, pour $t > 0$,
   $$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \geq t\right) \leq e^{-t^2/2}.$$
   On pourra s'inspirer de la question (1b).