Corrigé de l'interrogation du 11 mars 2019

Exercice 1

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit la variable $X = \max(U,V)$.

1. La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\max(U,V) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t, V \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t)\mathbb{P}(V \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

   (La quatrième égalité découle de l'indépendance de U et V).

2. La fonction de répartition F de X est une fonction continue, qui est également dérivable par morceaux. Par conséquent, X admet une densité, donnée par F' là où F est dérivable. Autrement dit, X admet pour densité la fonction p définie par

$$p(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2

1. Comme une densité doit être d'intégrale 1, on a

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\int_0^1 x^2 dx \right)^{-1} = 3, \\ c_2 &= \left(\int_0^1 x(1-x) dx \right)^{-1} = 6, \\ c_3 &= \left(\int_0^1 (1-x)^2 dx \right)^{-1} = 3. \end{aligned}$$

2. Soit f une fonction bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a (la deuxième égalité découlant de l'indépendance de I et des X_i)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(X_I) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{3} f(X_i)\mathbf{1}_{I=i} \right) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}f(X_i) \times \mathbb{E}\mathbf{1}_{I=i} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}f(X_i) \times \mathbb{P}(I=i) \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 f(x)3x^2 dx + \int_0^1 f(x)6x(1-x)dx + \int_0^1 f(x)3(1-x)^2 dx \right) \\ &= \int_0^1 f(x)\left(x^2 + 2x(1-x) + (1-x)^2\right) dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

   Par conséquent, X_I suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3

1. (a) On a (l'espérance et l'intégrale ont un sens car on intègre une fonction *positive*) :

$$\mathbb{E}e^{\lambda X} = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x - x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Cette intégrale est bien finie, car $\lambda x - x^2/2$ est inférieur à $-|x|$ (par exemple) pour $|x|$ assez grand, ce qui fait que $e^{\lambda x - x^2/2}$ est inférieur à la fonction intégrable $e^{-|x|}$ en $\pm\infty$.
En faisant le changement de variables $x = y + \lambda$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x - x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda^2/2 - y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = e^{\lambda^2/2} \times 1.$$

(b) Comme la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est strictement croissante pour $\lambda > 0$, on a l'égalité entre évènements

$$\{X \geq t\} = \{e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}\}$$

pour tout $\lambda > 0$. En appliquant l'inégalité de Markov, on obtient

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}) \leq \mathbb{E}e^{\lambda X} \times e^{-\lambda t} = e^{\lambda^2/2 - \lambda t}.$$

En prenant $\lambda = t$, on obtient le résultat voulu.

2. (a) On a $\mathbb{E}e^{\lambda X_i} = \frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda} = \mathrm{ch}(\lambda)$.

(b) En posant $\varphi(\lambda) = \ln(\mathbb{E}e^{\lambda X_i})$, on a $\varphi'(\lambda) = \frac{\mathrm{sh}(\lambda)}{\mathrm{ch}(\lambda)}$, et $\varphi''(\lambda) = 1/\mathrm{ch}(\lambda)^2 \leq 1$. Comme $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$, on obtient donc $\varphi(\lambda) \leq \lambda^2/2$, d'où le résultat.

(c) En posant $X = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$, on obtient par indépendance :

$$\mathbb{E}e^{\lambda X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\frac{\lambda}{\sqrt{n}} X_i} \leq \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda^2/2n} = e^{\lambda^2/2}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser les mêmes arguments qu'en question (1b).