Sorbonne Université — Probabilités (UE 1)
Master MEEF — 2019-2020

Interrogation du 2 décembre 2019

Durée : 1 heure 30

Questions de cours

1. Donner, avec justification, la moyenne et la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire de carré intégrable est intégrable.
3. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

Exercice 1

On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'évènements, et on note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$. On note aussi $B = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

1. Dans cette question, on suppose $\sum_{k=0}^{\infty} p_k < \infty$.
   (a) Montrer que $\mathbf{P}(\bigcup_{k\geq n} A_k)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   (b) En déduire que l'évènement B a pour probabilité 0.
2. Dans cette question, on suppose que les (A_n) sont indépendants et que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \infty$.
   (a) Montrer, pour $0 \leq n \leq N$ la relation
   $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) = 1 - \prod_{k=n}^{N}(1-p_k).$$
   (b) En utilisant la relation $\ln(1-x) \leq -x$, montrer que pour tout $n \geq 0$
   $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1.$$
   (c) Montrer que l'évènement B a pour probabilité 1.

Exercice 2

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre p. On note :

$$T = \inf\{n \geq 1, X_n \neq X_0\}$$
$$S = \inf\{n \geq 1, X_{n+T} \neq X_T\}.$$

Autrement dit, T et S désigne les longueurs des deux premières plus longues suites de nombres consécutifs tous égaux dans la suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$. Par exemple si la suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ donne la réalisation

$$0,0,0,0,0,1,1,1,0,1,1,\ldots,$$

alors T vaut 5 (la longueur de la suite $0,0,0,0,0$) et S vaut 3 (la longueur de la suite $1,1,1$).

1. (a) Montrer que $\mathbf{P}(T = n) = p(1-p)^n + (1-p)p^n$.
   (b) Calculer $\mathbf{E}T$. On pourra utiliser sans justification l'égalité $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.
2. (a) Montrer que $\mathbf{P}(T = n, S = m) = p^m(1-p)^{n+1} + (1-p)^m p^{n+1}$
   (b) En déduire la valeur de $\mathbf{P}(S = m)$.
   (c) Montrer que $\mathbf{E}S = 2$.