Interrogation du 2 décembre 2019 : corrigé

Exercice 1

1. (a) On a l'encadrement

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mathbf{P}(A_k) = \sum_{k\geq n} p_k.$$

Le membre de droite est le reste d'une série convergente, et tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini, d'où le résultat.

(b) On a, pour tout n, $B \subset \bigcup_{k\geq n} A_k$. On a donc $\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(\bigcup_{k\geq n} A_k)$. Comme le membre de droite tend vers 0, on a donc $\mathbf{P}(B) = 0$.

2. (a) Comme les (A_k) sont indépendants, les (A_k^c) le sont aussi, et on a donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{N} \mathbf{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{N} (1-p_k).$$

En passant au complémentaire, on a donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right) = 1 - \prod_{k=n}^{N} (1-p_k).$$

(b) D'après l'inégalité $\ln(1-x) \leq -x$, valable pour tout $0 \leq x \leq 1$ avec la convention $\ln(0) = -\infty$, on a

$$\ln\left(\prod_{k=n}^{N} (1-p_k)\right) = \sum_{k=n}^{N} \ln(1-p_k) \leq -\sum_{k=n}^{N} p_k.$$

La divergence de la série $\sum p_k$ implique donc que la quantité $\ln\left(\prod_{k=n}^{N}(1-p_k)\right)$ tend vers $-\infty$ quand $N \to \infty$. Par conséquent $\prod_{k=n}^{N}(1-p_k)$ tend vers 0 quand $N \to \infty$. Autrement dit,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{N} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) = 1.$$

(c) L'évènement B s'écrit donc comme une intersection dénombrable d'évènements de probabilité 1, de sorte que $\mathbf{P}(B) = 1$.

Exercice 2

1. (a) L'évènement $\{T = n\}$ peut s'écrire comme l'union disjointe :

$$\{T = n\} = \{X_0 = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1\} \cup \{X_0 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, X_n = 0\}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T = n) &= \mathbf{P}(X_0 = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1) + \mathbf{P}(X_0 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, X_n = 0) \\
&= \mathbf{P}(X_0 = 0) \dots \mathbf{P}(X_{n-1} = 0)\mathbf{P}(X_n = 1) + \mathbf{P}(X_0 = 1) \dots \mathbf{P}(X_{n-1} = 1)\mathbf{P}(X_n = 0) \\
&= (1-p)^n p + p^n (1-p).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité utilise l'indépendance des (X_i).

(b) On a l'égalité

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc

$$\mathbf{E}T = (1-p)p\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^n + p(1-p)\sum_{n=1}^{\infty} np^n = \frac{(1-p)p}{p^2} + \frac{p(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p}.$$

2. (a) L'évènement $\{T=n, S=m\}$ peut s'écrire comme l'union disjointe :

$$\begin{aligned}\{T=n,S=m\} =& \{X_0=0,\dots,X_{n-1}=0, X_n=1,\dots,X_{n+m-1}=1, X_{n+m}=0\}\\ &\cup \{X_0=1,\dots,X_{n-1}=1, X_n=0,\dots,X_{n+m-1}=0, X_{n+m}=1\}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T=n,S=m) =& \mathbf{P}(X_0=0,\dots,X_{n-1}=0, X_n=1,\dots,X_{n+m-1}=1, X_{n+m}=0)\\ &+ \mathbf{P}(X_0=1,\dots,X_{n-1}=1, X_n=0,\dots,X_{n+m-1}=0, X_{n+m}=1)\\ =& (1-p)^n p^m (1-p) + p^n (1-p)^m p,\end{aligned}$$

toujours en utilisant l'indépendance des (X_i).

(b) L'évènement $\{S=m\}$ est la réunion (disjointe) de tous les $(\{T=n,S=m\})_{n\geq 1}$, par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S=m) = \sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(T=n,S=m) &= p^m\sum_{n\geq 1}(1-p)^{n+1} + (1-p)^m\sum_{n\geq 1}p^{n+1}\\ &= p^m\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} + (1-p)^m\frac{p^2}{1-p}\\ &= p^{m-1}(1-p)^2 + (1-p)^{m-1}p^2.\end{aligned}$$

(c) On a :

$$\mathbf{E}S = (1-p)^2\sum_{m=1}^{\infty} mp^{m-1} + p^2\sum_{m=1}^{\infty} m(1-p)^{m-1} = \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2} + \frac{p^2}{p^2} = 2.$$