Sorbonne Université Master MEEF

Probabilités (UE 1) 2019-2020

Interrogation du 2 mars 2020

Durée : 1 heure 30

Questions de cours

1. Énoncer et démontrer la propriété d'absence de mémoire pour la loi exponentielle.
2. Soit $\lambda > 0$ et soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que X_n suive la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}$ et λ/n (on ne considère que les $n > \lambda$, pour avoir $\lambda/n < 1$). Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ on a $\lim_n \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(Y = k)$, où Y suit la loi de Poisson de paramètre λ.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite, de densité $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

1. Montrer que la variable aléatoire $\max(X, Y)$ admet la densité $2\varphi(x)\Phi(x)$, où $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s)ds$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
2. Après avoir justifié l'existence de $\mathbf{E}(\max(X, Y))$, montrer que $\mathbf{E}(\max(X, Y)) = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 2

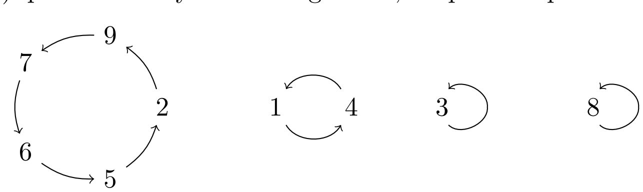
On rappelle qu'une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ est par définition une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même, ce qui revient à dire que le n-uplet $(\sigma(i))_{i=1,\ldots,n}$ est constitué des n entiers $\{1, \ldots, n\}$. Soit Σ une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ choisie aléatoirement, uniformément parmi toutes les permutations.

1. Pour une permutation σ donnée, que vaut $\mathbf{P}(\Sigma = \sigma)$?
2. Quelle est la probabilité que n soit un point fixe de Σ ? Autrement dit, que vaut $\mathbf{P}(\Sigma(n) = n)$?
3. Quelle est l'espérance du nombre de points fixes de Σ, à savoir $\mathbf{E}(\mathrm{Card}\{i \in \{1, \ldots, n\},\ \Sigma(i) = i\})$?

On rappelle que toute permutation admet une décomposition en *cycles*, c'est à dire que l'on peut partitionner $\{1, \ldots, n\}$ en sous-ensembles de la forme $(m_1, \ldots, m_k)$, avec $\sigma(m_i) = m_{i+1}$ et $\sigma(m_k) = m_1$ (les m_i étant tous distincts). Par exemple, la permutationc définie par

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma(n)$	4	9	3	1	2	5	6	8	7

se décompose en un cycle de longueur 5 (donné par $(2, 9, 7, 6, 5)$), un cycle de longueur 2 (qui est $(1, 4)$), et deux points fixes (3 et 8) qui sont des cycles de longueur 1, ce qui est représenté sur la figure ci-dessous :



4. Pour $1 \leq k \leq n$ fixé, montrer que la probabilité que 1 soit dans un cycle de longueur k pour la permutation Σ vaut $1/n$.
5. Pour k un entier fixé, quelle est l'espérance c_k du nombre de cycles de longueur k dans la décomposition de Σ ?
6. Quel est le nombre moyen de cycles dans la décomposition en cycles de Σ ?