Interrogation du 2 mars 2020 : corrigé

Questions de cours

1. Une variable X de loi exponentielle de paramètre λ vérifie $\mathbf{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t}$, de sorte que :

$$\mathbf{P}(X \geq t+s | X \geq t) = \frac{\mathbf{P}(\{X \geq t\} \cap \{X \geq t+s\})}{\mathbf{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbf{P}(X \geq t+s)}{\mathbf{P}(X \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \mathbf{P}(X \geq s).$$

   C'est cette égalité qui constitue la propriété d'absence de mémoire.

2. On a :

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

   Dans le membre de droite, $\frac{\lambda^k}{k!}$ ne dépend pas de n. Le deuxième terme tend vers 1 car il peut être écrit comme le produit de k termes tendant vers 1 (et k est fixé) :

$$\frac{n!}{n^k (n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

   Le troisième terme $(1 - \lambda/n)^{-k}$ tend vers 1 quand $n \to \infty$. Enfin, $(1 - \lambda/n)^n$ tend vers $e^{-\lambda}$. Finalement, pour $n \to \infty$ on a bien convergence de $\mathbf{P}(X_n = k)$ vers $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, ce qui correspond à une loi de Poisson de paramètre λ.

3. Comme $\{X + Y = n\} \subset \{0 \leq X \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{X = k\}$ (qui est une union disjointe), on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=n) = \mathbf{P}\left(\{X+Y=n\} \cap \bigcup_{k=0}^n \{X=k\}\right) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X+Y=n, X=k) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X+Y=n | X=k)\mathbf{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(Y=n-k | X=k)\mathbf{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(Y=n-k)\mathbf{P}(X=k).
\end{aligned}$$

   La dernière égalité découle de l'indépendance de X et Y. On a donc

$$\mathbf{P}(X+Y=n) = e^{-\lambda} e^{-\mu} \sum_{k=0}^n \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu^{n-k} \lambda^k = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda+\mu)^n,$$

   où la dernière égalité est une application de la formule du binôme de Newton. On reconnaît donc bien une variable de loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 1

1. Pour justifier l'existence de $\mathbf{E}(\max(X,Y))$ (c'est-à-dire l'intégrabilité de $\max(X,Y)$, on montre tout d'abord que $\mathbf{E}|\max(X,Y)| < \infty$. On trouve

$$\mathbf{E}|\max(X,Y)| \leq \mathbf{E}(|X|+|Y|) = 2\mathbf{E}|X| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx.$$

Cette dernière intégrale est finie, car la fonction positive $x \mapsto x e^{-x^2/2}$ est continue sur $[0,\infty[$, et est négligeable en ∞ devant la fonction intégrable e^{-x}.

On va déterminer la fonction de répartition de $\max(X,Y)$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathbf{P}(\max(X,Y) \leq t) = \mathbf{P}(X \leq t, Y \leq y) = \mathbf{P}(X \leq t)^2 = \Phi^2(t).$$

Comme Φ^2 est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, la variable $\max(X,Y)$ admet une densité, donné par la dérivée de Φ^2, qui est bien $2\varphi\Phi$.

2. En remarquant que $x\varphi$ est la dérivée de $-\varphi$, on obtient, en faisant une intégration par parties

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\max(X,Y)) = \int_{\mathbf{R}} x 2\varphi(x)\Phi(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} x e^{-x^2/2}\Phi(x)dx &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} \left(-e^{-x^2/2}\right) \times \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

Exercice 2

1. L'ensemble des permutations a $n!$ éléments, par exemple parce qu'une permutation revient à un tirage ordonnée sans remise de n éléments dans $\{1,\ldots,n\}$, ou encore parce que le choix d'une permutation revient à choisir l'image de 1 (n choix), puis l'image de 2 ($n-1$ choix, car 1 et 2 n'ont pas la même image), puis l'image de 3 ($n-2$ choix), etc.

Comme Σ est tirée uniformément, on a donc $\mathbf{P}(\Sigma = \sigma) = 1/n!$.

2. Il y a autant de permutation de $\{1,\ldots,n\}$ qui fixent n que de permutations de $\{1,\ldots,n-1\}$, c'est-à-dire $(n-1)!$. Par conséquent $\mathbf{P}(\Sigma(n) = n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

3. Par linéarité, l'espérance du nombre de point fixes est donnée par

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\Sigma(i)=i}\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\Sigma(i)=i}\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\Sigma(i)=i) = n\mathbf{P}(\Sigma(n)=n) = 1.$$

L'avant-dernière égalité est une conséquence de la symétrie entre tous les éléments de $\{1,\ldots,n\}$.

4. Le choix du cycle contenant 1 revient à un tirage ordonné sans remise de $k-1$ éléments dans $\{2,\ldots,n\}$: en effet, on choisit l'image de 1, puis l'image de l'image de 1, etc. Ces tirages sont au nombre de $\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$. Ensuite, il reste à déterminer le reste de la permutation, qui est une permutation quelconque sur $n-k$ éléments, ce qui laisse $(n-k)!$ choix. Au final, il y a $\frac{(n-1)!}{(n-k)!} \times (n-k)! = (n-1)!$ permutations pour lesquelles 1 est dans un cycle de longueur k. La probabilité que Σ soit dans cet ensemble est donc $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

5. En notant $A_i = \{i \text{ est dans un cycle de longueur } k \text{ de } \Sigma\}$, on remarque que le nombre C_k de cycles de longueur k dans Σ est donné par $C_k = \frac{1}{k}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$: en effet, chaque cycle est compté k fois dans la somme, puisqu'il est composé de k éléments. On en déduit :

$$c_k = \mathbf{E}(C_k) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{k}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_i}\right) = \frac{1}{k}\sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_i}) = \frac{1}{k}\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_i) = \frac{n}{k}\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{k}.$$

6. Le nombre moyen de cycle est donné par $c_1 + \ldots + c_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. On peut remarquer que ce nombre est équivalent à $\ln n$ pour n grand.