

Quelques remarques sur l'interrogation du 2 mars 2020

J'ai vu de nombreuses copies qui manipulaient des calculs d'une manière qui me paraît très inquiétante de la part de quelqu'un qui devra enseigner des mathématiques. Je parle d'égalités du type suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X + Y = n) &= \mathbf{P}(X = k, Y = n - k), \\ \mathbf{P}(X > t) &= \int_0^\infty \exp(-t) dt, \\ \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Ces égalités sont non seulement fausses, mais elles sont même *absurdes*. En effet, si on prend la première : dans le membre de gauche on obtient une expression dépendant de n , à droite on a une expression dépendant de n et de k . Comment le membre de droite peut-il dépendre d'un paramètre k , si le membre de gauche n'en dépendait pas ? Il fallait bien sûr écrire

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k, Y = n - k).$$

Dans le membre de droite, il y a un bien un k qui apparaît, mais il s'agit d'une *variable muette*. Il s'agit juste d'une notation pour l'entier qui indexe la somme. On aurait très bien pu écrire

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{q=0}^n \mathbf{P}(X = q, Y = n - q), \text{ ou bien } \mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{l=0}^n \mathbf{P}(X = l, Y = n - l).$$

Dans ces différentes expressions, le membre de droite ne *dépend* pas de q , de l ou de k : ce sont juste des noms qui représentent l'entier sur lequel on fait la somme.

Disons que les variables mathématiques peuvent se classer en deux catégories :

- Les *paramètres*, auxquels on peut donner une valeur particulière. Par exemple dans $\cos(t) + \sin(t)$, la variable t est un paramètre. On pourrait poser par exemple $t = \pi/2$, et l'expression prendra la valeur $\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)$ (ce qui vaut 1).
- Les *variables muettes*, qui servent par exemple à représenter l'entier sur lequel on fait une somme, ou à écrire une fonction que l'on intègre. Par exemple, dans l'expression $\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2}$, x est une variable muette : d'une part on ne pourrait pas donner une valeur à x (écrire $\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2}$ n'a pas de sens), d'autre part l'expression en question ne *dépend pas de* x : on a toujours $\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, et on pourrait tout aussi bien écrire $\int_{\mathbf{R}} \frac{dz}{1+z^2}$ ou $\int_{\mathbf{R}} \frac{du}{1+u^2}$ pour obtenir une expression complètement équivalente.

En principe, dans une égalité, les membres de droite et de gauche doivent dépendre des *mêmes paramètres* : si le membre de gauche dépend de t , n et x , alors le membre de droite devra aussi dépendre de t , de n et de x (et de rien d'autre). Il y a tout de même une exception : une expression peut dépendre d'un paramètre, mais prendre la *même valeur* quel que soit la valeur prise par le paramètre. Par exemple, $\cos^2(t) + \sin^2(t)$ est une expression dépendant d'un paramètre t , mais il se trouve que *quelle que soit la valeur prise par t* , on a toujours $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Par contre, les *variables muettes* figurant à gauche d'une égalité ne sont pas forcément les mêmes : il est tout à fait légitime d'écrire

$$\int_0^\infty e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-s} ds = 1.$$

On a trois expressions qui sont bien équivalentes, une première avec la variable muette t , une deuxième avec la variable muette s , une troisième sans variable muette.

Dernière remarque : une expression peut dépendre de paramètres *qui ne sont pas explicitement écrits*. Par exemple, si X est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ , alors $\mathbf{P}(X > t)$ dépend de *deux* paramètres : t et λ . Le paramètre λ n'apparaît pas, mais il est "caché" dans X : toute expression contenant un X sera a priori une fonction de λ .

Il est très important de savoir reconnaître dans une expression quels sont les paramètres, et quelles sont les variables muettes, et de savoir vérifier que les paramètres sont les mêmes de chaque côté d'une égalité. Vérifiez que vous savez le faire sur les trois exemples donnés au début de ces remarques, et notez que les égalités obtenues sont absurdes : les paramètres ne sont pas les mêmes dans les membres de gauche et de droite.

Réponses :

- Dans la première égalité, n est un paramètre dans le membre de gauche, or dans le membre de droite on a deux paramètres (n et k), ce qui est incohérent.
- Dans la deuxième égalité, à gauche on a un paramètre t , et il n'y en a aucun à droite (il y a bien des t qui apparaissent, mais il s'agit d'une variable muette).
- Dans la troisième, à droite on a *deux* paramètres : p et n (k est une variable muette). À gauche, on a en principe *trois* paramètres : il y a un k qui figure explicitement, mais X est implicitement une variable de loi de Bernoulli de paramètres n et p , ce qui rajoute deux paramètres.