Sorbonne Université
Master MEEF

Probabilités (UE 1)
2020-2021

Correction de l'interrogation du 17 mars 2021

Exercice 1

1. En utilisant la formule des probabilités totales sur les évènements $\{N_0 = n\}$, on obtient :

$$\mathbf{P}(Z \geq t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z \geq t | N_0 = n)\mathbf{P}(N_0 = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\min_{i=1}^{n} X_i \geq t \middle| N_0 = n \right) \mathbf{P}(N_0 = n).$$

Par indépendance des $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ et de N_0, puis par indépendance des $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ entre eux, cela donne

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z \geq t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\min_{i=1}^{n} X_i \geq t \right) \mathbf{P}(N_0 = n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \geq t, \dots, X_n \geq t)\mathbf{P}(N_0 = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \geq t) \dots \mathbf{P}(X_n \geq t)\mathbf{P}(N_0 = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \geq t)^n \mathbf{P}(N_0 = n).\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que les $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ ont tous la même loi. Enfin, en utilisant le fait que X_1 est uniforme sur $[0, 1]$ et $t \in [0, 1]$, et la définition de la loi de Poisson :

$$\mathbf{P}(Z \geq t) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-t)^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1-t)\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{(1-t)\lambda} = e^{-\lambda t}.$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(J \geq j) = \mathbf{P}(\min\{k \in \mathbf{N}, N_k \neq 0\} \geq j) = \mathbf{P}(N_0 = 0, \dots, N_{j-1} = 0) &= \mathbf{P}(N_0 = 0) \dots \mathbf{P}(N_{j-1} = 0) \\ &= \mathbf{P}(N_0 = 0)^j \\ &= e^{-\lambda j}.\end{aligned}$$

3. (a) Voir cours. On a $\mathbf{E}N_0 = \mathbf{V}N_0 = \lambda$.

   (b) Par le théorème limite central appliqué aux $(N_k)_{k\in\mathbf{N}}$, et en utilisant $\mathbf{E}N_0 = \mathbf{V}N_0 = \lambda$, on a

$$\mathbf{P}\left(-1.96 \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} N_k - \lambda \right) \leq 1.96 \right) \to 0.95.$$

Comme la fonction $\varphi : \lambda \mapsto \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k=1}^{n} N_k - \sqrt{n\lambda}$ est continue et strictement décroissante pour $\lambda \in]0, \infty[$, et que par ailleurs elle tend respectivement vers ∞ et $-\infty$ en ∞ et en 0, on a $\varphi(\lambda) \in [-1.96, 1.96]$ si et seulement si $\lambda \in [A_n, B_n]$ pour A_n et B_n les solutions de $\varphi(A_n) = 1.96$ et $\varphi(B_n) = -1.96$. L'intervalle $[A_n, B_n]$ est donc un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour λ.

Après calculs (résolution de polynômes de degré 2 dont $\sqrt{nA_n}$ ou $\sqrt{nB_n}$ sont racines), on trouve :

$$A_n = \frac{1}{n} \left(\sqrt{0.96 + \sum_{k=1}^{n} N_k} - 0.98 \right)^2 \quad ; \quad B_n = \frac{1}{n} \left(\sqrt{0.96 + \sum_{k=1}^{n} N_k} + 0.98 \right)^2.$$

4. En appliquant la formule des probabilités totales avec les évènements $\{N_0 = n\}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{N_0} \mathbf{1}_{X_i \le 1/2} = k \middle| N_0 = n\right) \mathbf{P}(N_0 = n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \le 1/2} = k \middle| N_0 = n\right) \mathbf{P}(N_0 = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \le 1/2} = k\right) \mathbf{P}(N_0 = n)\end{aligned}$$

(la dernière égalité découle de l'indépendance de N_0 et des $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$). Or, $\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \le 1/2}$ suit la loi binomiale de paramètres n et $1/2$ (les $\mathbf{1}_{X_i \le 1/2}$ sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\mathbf{P}(X_i < 1/2) = 1/2$), donc

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \le 1/2} = k\right) = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} & \text{si } k \le n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\mathbf{P}(M=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{2^n} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k! 2^k} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\lambda^q}{2^q q!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k! 2^k} e^{\lambda/2} e^{-\lambda} = \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-\lambda/2}.$$

Exercice 2

1. Si $\lambda > 0$, alors les p_n sont des réels strictement positifs, il définissent donc une probabilité sur $\mathbf{N}$ dès lors que $\sum_{n \in \mathbf{N}} p_n = 1$. Il suffit donc de montrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge, pour conclure (en prenant pour valeut de λ l'inverse de la somme de cette série). Or $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim 1/n^3$, qui est bien le terme général d'une série convergente.

   Pour calculer la somme, on décompose en éléments simples, ce qui donne

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

   On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} &= \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) - \left(\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1}\right) \\ &\quad + \left(\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(N+2)} - \frac{1}{2(N+1)}.\end{aligned}$$

   En prenant $N \to \infty$, on obtient donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 1/4$, et le choix $\lambda = 4$ fait de λ une probabilité.

2. Si X suit la loi $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$\mathbf{E}|X| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} < \infty \text{ et } \mathbf{E}X^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(n+1)(n+2)} = \infty,$$

car $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sim 1/n^2$ et $\frac{n}{(n+1)(n+2)} \sim 1/n$ ($\mathbf{E}|X|$ et $\mathbf{E}X^2$ sont bien définis sans justifications supplémentaires, puisque les variables $|X|$ et X^2 sont positives).

Par conséquent, X admet une moyenne, mais pas de variance. On a alors

$$\mathbf{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n+1} - \frac{4}{n+2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n+1} - \frac{4}{n+2} = \lim_{N\to\infty} 2 - \frac{4}{N+2} = 2.$$