Interrogation du 8 octobre 2020 : corrigé

Exercice 1

La variable $\mathbf{E}(X|X+Y)$ est bien définie car X est supposée intégrable. Par ailleurs, on sait qu'une variable aléatoire $\sigma(X+Y)$-mesurable prend la forme $h(X+Y)$ pour une fonction h mesurable.

De plus, les couples (X,Y) et (Y,X) ayant même loi (car X et Y sont indépendantes et de même loi), on a

$$\mathbf{E}(X|X+Y) = h(X+Y) = \mathbf{E}(Y|X+Y)$$

pour la même fonction h. On a donc d'une part

$$\mathbf{E}(X|X+Y) + \mathbf{E}(Y|X+Y) = 2h(X+Y),$$

et d'autre part

$$\mathbf{E}(X|X+Y) + \mathbf{E}(Y|X+Y) = \mathbf{E}(X+Y|X+Y) = X+Y,$$

de sorte que $h(X+Y) = (X+Y)/2$. Autrement dit :

$$\mathbf{E}(X|X+Y) = (X+Y)/2.$$

Exercice 2

1. Les lois marginales du couple (X,Λ) s'obtiennent en intégrant la densité du couple par rapport à une des variables. La densité de X est donc donnée par :

$$f_X(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-(x+1)\lambda} d\lambda = \frac{1}{(1+x)^2},$$

et celle de Λ est donnée par :

$$f_\Lambda(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-(x+1)\lambda} dx = e^{-\lambda}.$$

2. L'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X|\Lambda)$ est bien définie, car X est une variable positive. Une espérance conditionnelle sachant Λ se calcule en restreignant la densité au sous-ensemble $\{(x,\Lambda) \in \mathbf{R}^2, x \in \mathbf{R}\}$ et en renormalisant. Plus précisément :

$$\mathbf{E}(X|\Lambda) = \frac{\int_0^\infty x f(x,\Lambda) dx}{\int_0^\infty f(x,\Lambda) dx} = \frac{\int_0^\infty x \Lambda e^{-(x+1)\Lambda} dx}{f_\Lambda(\Lambda)} = \frac{e^{-\Lambda}/\Lambda}{e^{-\Lambda}} = \frac{1}{\Lambda}.$$

3. De même :

$$\mathbf{E}(\Lambda|X) = \frac{\int_0^\infty \lambda f(X,\lambda) d\lambda}{f_X(X)} = (X+1)^2 \int_0^\infty \lambda^2 e^{-(X+1)\lambda} d\lambda = \frac{2}{X+1}.$$