TD6. Intégration

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. On définit pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu_f(A) = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu.$$

Montrer que μ_f est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable positive. Montrer que :

a) Pour tout $a > 0$, $\mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f d\mu$.

b) Si $\int_X f d\mu < +\infty$, alors f est finie μ-p.p.

c) $\int_X f d\mu = 0$ si et seulement si f est nulle μ-p.p.

d) Si $g : X \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable positive telle que $f = g$ μ-p.p., alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$;

Exercice 3. Dans les quatre cas suivants (où $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

a) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$,

b) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$,

c) $f_n(x) = \sin(nx) \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$,

d) $f_n(x) = |\cos(x)|^{1/n} e^{-x}$.

Exercice 4. Calculer la limite des suites suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|/n} dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2}}{2\cos(\frac{x}{n}) - 1} \mathbb{1}_{\{3|\cos(\frac{x}{n})| \geq 2\}} dx, \qquad \sum_{m \geq 1} \frac{n}{m} \sin(\frac{1}{nm}).$$

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$, mesurables et positives. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f μ-p.p., et que

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu < +\infty.$$

Montrer que $\displaystyle\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$.

Exercice 6. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p. vers une fonction f.

a) On suppose qu'il existe n_0 tel que $\int_E f_{n_0} d\mu < \infty$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.
b) Que peut-on dire sans l'hypothèse d'intégrabilité ?

Exercice 7. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
a) Montrer que $\lim_n n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0$.
b) Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu < +\infty.$$

Exercice 8. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et f une fonction $A \to \mathbb{R}$ μ-intégrable.
a) Montrer que :

$$\int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$

(Ceci exprime la continuité de l'intégrale par rapport à la mesure).
c) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ intégrable pour la mesure de Lebesgue et F définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_{[0,x]} f d\lambda$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose qu'il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ intégrable positive telle que $|f_n| \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$. On suppose en outre que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f au sens suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu(|f_n - f| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On dit que $(f_n)_n$ converge *en mesure* vers f.
a) Montrer que $|f| \leq g$ μ-p.p.
b) À l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale, en déduire que

$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 10. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f et $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions intégrables telles que

$$\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ convergeant vers f μ-p.p., et une fonction B intégrable telle que $\sup_{n\geq 1} |f_{\phi(n)}| \leq B$ μ-p.p.