Université Paris VI
Master 1 : Calcul stochastique et contrôle stochastique. 4M065. 2016/2017

TD 2 : Obligations, contrats futurs et options

Une *obligation* de *maturité* n, de *coupons* $C_1, \dots, C_n$ et de *valeur de remboursement* R est un flux dans lequel, si on se place à la date 0, on reçoit C_1 à la date 1, C_2 à la date 2,…, C_n à la date n, plus R à la date n.

En général, les coupons sont calculés à partir d'un nombre N, appelé *nominal* et d'un nombre c appelé *taux de coupon*, tels que pour tout k, $C_k = Nc$.

Un *zéro coupon* de maturité n et de nominal N est une obligation sans coupon et dont la valeur de remboursement vaut N.

1. Evaluation d'obligations.

On considère une obligation O de maturité T années. Le taux de coupon est c et le nominal N. La valeur de remboursement est égale à R. On note, pour tout n, r_n le taux (à composition annuelle **continue**) sans risque du zéro coupon de maturité n années à la date actuelle, notée 0.

a. Rappeler le prix d'un zéro coupon de maturité n et de nominal égal à 1 (c'est à dire ce que l'on doit payer à la date 0 pour recevoir 1 à la date n).

b. Que vaut l'obligation O à l'instant 0 ? Dans le cas où r_n est constante et vaut r, avec $c = e^r - 1$ et $R = N$, quelle est cette valeur ? Comment cela se comprend-il ?

c. On suppose maintenant que la courbe des taux zéro coupon est plate à toute date, i.e. $r_n = r$ pour tout n et ne varie pas quand le temps passe. Que vaut l'obligation en $t \in [0, T]$ (t entier) ? Comment se comporte le prix de O lorsque r évolue ? La valeur absolue de la dérivée du prix rapportée au prix (i.e. divisée par le prix) est appelée *sensibilité* et est notée S.

d. Vous achetez en 0 l'obligation O et vous ré-investissez tous les coupons au taux r jusqu'à la date $\tau \in [0, T]$ (τ entier). Quel montant $M_\tau(r)$ obtenez vous en τ avec ces investissements et la revente de O (à la date τ) ?

e. Calculer la durée de détention de l'obligation D telle que la richesse obtenue suivant la stratégie exposée en d. ne soit pas sensible à une petite variation de r (i.e. telle que la dérivée de cette richesse par rapport à r soit nulle) ? On appelle cette durée la *duration* de l'obligation.

f. Quel lien existe-t-il entre sensibilité et duration ?

2. Emission obligataire.

On considère une obligation O de maturité T années qui doit être émise aujourd'hui. Le taux de coupon est c, le nominal N, la valeur de remboursement est égale à R et la valeur d'émission (i.e. le prix) est E. On note r_n le taux annuel (composé) sans risque du zéro coupon de maturité n années.

Donner la relation entre E, N, c, R et les r_n.

3. Contrat à terme.

On considère un contrat de vente (i.e. un contrat qui donne le droit de vendre) au prix K d'un actif dans T années, dont l'estimation actuelle du prix dans T années est $S < K$, avec paiement en T. On note r_n le taux annuel (composé) sans risque du zéro coupon de maturité n années. Quel est le prix de revente actuel d'un tel contrat ?

4. Taux de change futur.

On note r_e et r_d les taux étrangers et domestiques à un an, τ_0 le nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère en 0. On considère un contrat par lequel un agent A achète à un agent B le droit de lui échanger, dans un an, N unités de devise étrangère au taux F (i.e. contre FN unités de devise domestique). Combien ce contrat vaut-il aujourd'hui ?

5. Taux de change futur et fourchette de prix. On note encore r_e et r_d les taux étrangers et domestiques à un an mais cette fois-ci, à la date 0, les taux de changes ne sont plus les mêmes à l'achat et à la vente, i.e.

- τ_0^a = nombre d'unités de devise étrangère obtenues contre une unité de devise domestique,
- τ_0^v = nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère.

On note F le taux de change futur, c'est à dire que F est un nombre tel que à la date 1,

- F = nombre d'unités de devise étrangère obtenues contre une unité de devise domestique,
- $1/F$ = nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère.

a. Quel lien doit-il y avoir entre τ_0^a et τ_0^v ?

b. Quelle est la fourchette de prix dans laquelle doit se trouver le taux de change futur F en l'absence d'opportunités d'arbitrage ?

6. Parité call-put.

On considère un actif financier S de prix S_t à la date t.

a. Un call européen est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer S à un prix K (strike) fixé à l'avance à une date T (maturité) si l'acheteur le désire (exerce son option). On note C_t le prix à la date t du call de maturité T et de strike K. Quelle est la valeur en T du call (du point de vue de l'acheteur) ?

b. Un put européen est un contrat par lequel le vendeur s'engage à acheter S à un prix K (strike) fixé à l'avance à une date T (maturité) si l'acheteur le désire (exerce son option). On note P_t le prix à la date t du put de maturité T et de strike K. Quelle est la valeur en T du put (du point de vue de l'acheteur) ?

c. On note B_t le prix en t du zéro coupon versant 1 en T. Rappeler ce que ça représente. Montrer que en absence d'opportunités d'arbitrage, $C_t - P_t = S_t - KB_t$. Ce lien est appelé *relation de parité call-put.*

7. Option américaine.

On note B_t le prix en t du zéro coupon versant 1 en T. On considère un actif financier S de prix S_t à la date t. Un call américain est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer S à un prix KB_t (strike) fixé à l'avance à une date t (quelconque) inférieure à T si l'acheteur exerce son option en t. On note C_t le prix à la date t du call européen de maturité T et de strike K et C_t^a le prix du call américain correspondant. On note B_t le prix en t du zéro coupon versant 1 en T.

a. Montrer que en l'absence d'opportunité d'arbitrage, $C_t^a \geq C_t$.

b. On suppose que S_t est aléatoire et que $P(S_T > K) > 0$ et que $P(S_T < K) > 0$. Montrer qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage $C_t > [S_t - KB_t]^+$.

c. En déduire que sous les hypothèses précédentes, il vaut toujours mieux vendre une option américaine plutôt que de l'exercer, et enfin que $C_t^a = C_t$.