

TD 5 - 9 : Contrôle stochastique à horizon fini

1. Chaîne de Markov inhomogène à valeurs réelles. On considère un processus stochastique défini par

$$X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \quad X_{n+1} = X_n \left(1 + \frac{\alpha}{n+1} Y_n\right),$$

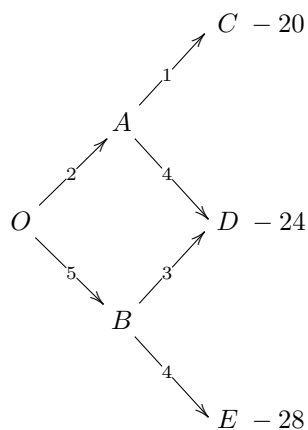
où $\alpha \in \mathbb{R}$ et les Y_n sont des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (i.e. de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$).

a) Déterminer le noyau de cette chaîne de Markov inhomogène.

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable. Exprimer sous la forme d'intégrales $\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\sigma(X_1, \dots, X_n)]$ et $\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\sigma(X_n)]$.

c) Montrer que X_n est une martingale.

2. Programmation dynamique : course au trésor avec aléa. Un navigateur part du port O , atteint ensuite un des deux ports A, B , puis atteint un des trois ports C, D, E . Il obtient un prix (indiqué en négatif sur la figure). Mettre le cap vers une certaine destination a un coût, indiqué sur la figure. Partant de chacune des trois villes O, A, B , il peut choisir un cap (vers A ou B en partant de O , vers C ou D en partant de A et vers D ou E en partant de B).



a) On suppose le cap choisi toujours atteint. Donner la stratégie optimale.

b) On suppose que choisir un cap lui donne 75% de chances d'arriver à la destination choisie, et 25% de chances d'arriver à l'autre destination atteignable (qui est B s'il est en O et a choisi d'aller vers A , A s'il est en O et a choisi d'aller vers B , D s'il est en A et a choisi d'aller vers C , etc...). Déterminer la stratégie optimale.

c) On change le coup du passage $B \rightarrow D$, qui coûte maintenant 24. Reprendre les deux premières questions.

3. Programmation dynamique : plus court chemin de A à B , sans aléa. On considère des villes $A, B, \dots, G$. Certaines sont reliées directement par la route, d'autres non. Les longueurs des trajets directs entre deux villes, quand ils existent, sont

$$AB = 15, AC = 5, AD = 3, AG = 14$$

$$BE = 5, BF = 7, BG = 6$$

$$CD = 11, CE = 3, CF = 2$$

$$DG = 6, DE = 7, EG = 7.$$

Déterminer le plus court chemin de A à B .

4. Un jeu favorable. Soit $0.5 < p < 1$. Un joueur fait N parties (numérotées de 0 à $N-1$) indépendantes où la probabilité de succès est p et la probabilité d'échec est $q = 1 - p$. Sa fortune initiale de $x_0 > 0$ Euros. Pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$, à l'étape n , il met sur le tapis une fraction U_n de sa fortune (jamais plus que ce qu'il possède) : s'il gagne, il récupère ce qu'il a misé, plus autant d'argent. S'il perd, il perd sa mise. Déterminer la stratégie lui permettant d'optimiser le logarithme de sa fortune finale. Est-ce équivalent au fait d'optimiser sa fortune finale ?

5. Un jeu défavorable. Soit $0.25 \leq p < 0.5$. Un joueur fait N parties (numérotées de 0 à $N-1$) indépendantes où la probabilité de succès est p et la probabilité d'échec est $q = 1 - p$. Sa fortune initiale de $x_0 > 0$ Euros. Pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$, à l'étape n , il met sur le tapis une fraction U_n de sa fortune (jamais plus que ce qu'il possède) : s'il gagne, il récupère ce qu'il a misé, plus autant d'argent. S'il perd, il perd sa mise. Déterminer la stratégie lui permettant d'optimiser le logarithme de sa fortune finale. Est-ce équivalent au fait d'optimiser sa fortune finale ?

6. Révision d'une machine. Une machine peut se trouver dans 5 états $E = \{0, \dots, 4\}$. Son évolution spontanée, de jour en jour, est markovienne de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_0 & p_0 & p_0 & p_0 \\ 0 & p_1 & p_1 & p_1 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 & p_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}$$

avec $p_i = \frac{1}{5-i}$ for chaque i . Le coût journalier d'utilisation de la machine est de $\alpha(i)$ si la machine est dans l'état i et la remise à l'état 0, qui peut se faire au début de chaque journée, coûte R .

Poser les équations définissant la stratégie optimale.

7. Horticulture. Un horticulteur cultive des plantes. Le nombre de pieds dont il dispose au début de l'année n est noté X_n . Durant l'année n , chaque pied donne naissance à un autre pied. A la fin de l'été, il choisit d'en garder une proportion $U_n \in [0, 1]$ des pieds nouveaux de l'année et vend les autres pieds nouveaux au prix unitaire de 1 Euro. Parmi les pieds qu'il choisit de garder, seule une proportion aléatoire $Y_n \in [0, 1]$ survit durant l'automne.

Les plantes ayant survécu à l'automne de l'année où elles sont nées ne meurent pas avant l'année N , où il choisit de toutes les vendre au prix unitaire de 1 Euro.

Les plantes ayant survécu à l'automne de l'année où elles sont nées ne meurent pas avant l'année N , où il choisit de toutes les vendre au prix unitaire de 1 Euro.

On suppose que $X_0 = x_0 > 0$ et que les Y_n sont des v.a.i de loi μ .

- Exprimer X_{n+1} en fonction des données de l'année n .
- Définir le modèle markovien contrôlé sous-jacent.
- Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1} .
- Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ tels que pour tout n , $J_n(x) = \alpha_n x$. Montrer que pour tout n , $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ et $\alpha_n \geq 1 + N - n$. On posera $m = \mathbb{E}[Y_1]$.
- On suppose $m < 1$. Montrer qu'il existe $K \in \{0, N-1\}$ tel que le contrôle optimal est donné par $u_n = 1$ pour $n < K$ et $u_n = 0$ pour $n \geq K$.
- Comment interprète-t-on ce résultat ?

8. Arbitrage épargne/consommation. On dispose, au début de l'année n ($n \in \{0, \dots, N\}$), d'un capital de X_n , dont on choisit de dépenser une proportion $U_n \in [0, 1]$. On épargne le reste $(1 - U_n)X_n$ du capital qui, par le biais d'un rendement aléatoire, se fructifie de façon à devenir $R_n(1 - U_n)X_n$ à la fin de l'année n , avec $R_n \geq 0$ (mais pas forcément ≥ 1). On suppose les R_n v.a.i de loi μ et on note $m = \mathbb{E}[R_1]$. A la N -ème année, on dépense ce qu'il nous reste.

On cherche à optimiser la somme dépensée.

- Définir le modèle markovien contrôlé sous-jacent.
- Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1} .
- Selon la valeur de m , calculer $J_{N-1}(x)$, puis J_n pour $n \leq N-1$ et donner la stratégie optimale.
- Comment interprète-t-on ce résultat ?

9. Contrôle optimal classique. On considère on considère une marche aléatoire réelle (X_n) de valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ et de sauts $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ de valeur ± 1 avec probabilités $1/2$. On se donne $g > 0$, $N \geq 1$ et on cherche à minimiser, en moyenne, gX_N^2 . On a la possibilité de ramener, à chaque étape, la marche au point où l'on veut, avec un contrôle U_n de coût U_n^2 .

Autrement dit, on considère le système

$$X_{n+1} = X_n + U_n + \varepsilon_n,$$

avec $X_0 = x_0$, U_n mesurable par rapport à $\sigma(X_0, \dots, X_n)$ pour tout n , et $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ vaïid de loi $(\delta_1 + \delta_{-1})/2$ et on cherche à minimiser

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} U_k^2 + gX_N^2\right\}.$$

a) Question préliminaire. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a > -1$. Définissons la fonction $f(t) = at^2 + b$. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\min_{u \in \mathbb{R}} \left\{ u^2 + \frac{f(x+u+1) + f(x+u-1)}{2} \right\}$$

est atteint en $u^* = \frac{-ax}{1+a}$ et vaut $a + \frac{ax^2}{1+a} + b$.

b) Définir le modèle markovien contrôlé sous-jacent à notre problème.

c) Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1} .

d) Calculer $J_{N-1}(x)$, puis J_n pour $n \leq N-1$ et donner la stratégie optimale.

10. Arbitrage épargne/consommation (2).

On considère donc le modèle markovien contrôlé suivant :

$$X_0 = x_0 > 0, \quad X_{n+1} = X_n + Y_n X_n (1 - U_n),$$

où $U_n \in [0, 1]$. Les (Y_n) forment une suite de vaïid > 0 d'espérance finie θ . Le processus (X_n) représente l'évolution, au cours du temps, d'une certaine fortune, et $U_n X_n$ représente la somme dépensée à l'instant n .

On cherche à optimiser la somme dépensée : on désire donc maximiser

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k U_k\right).$$

a) Définir le modèle markovien contrôlé sous-jacent.

b) Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1} .

c) Montrer qu'il existe des réels $\rho_N, \dots, \rho_0$ tels que pour tout $n = N, \dots, 0$, pour tout $x \geq 0$,

$$J_n(x) = \rho_n x.$$

Donner la relation de récurrence satisfaite par les ρ_n ainsi que les valeurs des contrôles optimaux.

d) Montrer qu'il existe une unique $K \in \{0, \dots, N\}$ tel que les contrôles optimaux sont donnés par pour tout $n < K$,

$$U_n = 0 \text{ si } n < K \text{ et } U_n = 1 \text{ si } n \geq K.$$

Interpréter.