

TD1. Ensembles.

Exercice 1.

Soit A, B, C trois ensembles.

- On suppose que $A \cup B \subseteq A \cup C$ et $A \cap B \subseteq A \cap C$. Montrer que $B \subseteq C$.
- On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 2.

Soit E un ensemble et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans \mathbb{R}_+ . On suppose que $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ pour toutes parties disjointes A et B de E .

- Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
- Montrer que $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$ pour toutes parties A et B de E .
- Montrer que $f(A) \leq f(B)$ pour toutes parties A et B de E telles que $A \subseteq B$.
- Soit $(A_n)_n$ une suite croissante de parties de E . Montrer que la suite $(f(A_n))_n$ est croissante et convergente, de limite inférieure ou égale à $f(\cup_n A_n)$.
- Exemple : Reprendre la question d) avec $E = \{1, \dots, n\}$ et $f(A) = \text{card}(A)$ pour $A \subseteq E$.

Exercice 3.

Soit X un ensemble et A, B, C, D des parties de X . On note $A \Delta B$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

la différence symétrique de A et B . Calculer $A \Delta \emptyset$, $A \Delta X$ et $A \Delta A$, puis montrer

- $(A \cup B) = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$,
- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
- $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$,

Exercice 4.

Soit X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application.

- Soit $A \subseteq X$. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est injective.
- Montrer que si pour tout sous-ensemble A de X on a l'égalité $A = f^{-1}(f(A))$, alors f est injective.
- Soit $B \subseteq Y$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est surjective.
- Montrer que si pour tout sous-ensemble B de Y on a l'égalité $f(f^{-1}(B)) = B$, alors f est surjective.

Exercice 5.

Soit X et Y deux ensembles, $f : X \rightarrow Y$ une application, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties de Y . On suppose I et J non vides. Soit B une partie de Y . Démontrer les assertions suivantes.

- a) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ et $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, avec égalité quand f est injective.
- b) $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$ et $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.
- c) ${}^c(f^{-1}(B)) = f^{-1}({}^cB)$.

Exercice 6.

Soit A, B des parties d'un ensemble X . Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur X et à valeurs réelles, dire si elle est la fonction indicatrice d'une partie de X et si oui, de laquelle.

- a) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, b) $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$, c) $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, d) $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$, e) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$,
 f) $\sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$, g) $\inf(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Exercice 7.

Déterminer explicitement ou graphiquement les fonctions définies sur \mathbb{R}_+

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{[n, n+1[}, \quad \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{[n, n+1/2[}, \quad \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{[n, +\infty[}, \quad \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{[0, n[}.$$

Exercice 8.

Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'ensembles on note

$$\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

- a) Que représentent ces ensembles ?
 b) Montrer que

$$\bigcap_n A_n \subset \liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n \subset \bigcup_n A_n.$$

- c) Déterminer $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ si $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

Exercice 9.

- a) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dénombrable.

On pourra considérer les ensembles $J(n) = \{x \in]a, b[; |f(x+) - f(x-)| > 1/n\}$.

- b) Qu'en est-il pour une fonction réelle monotone définie sur \mathbb{R} tout entier ?