

TD Introduction aux Probabilités

Shen Lin
2021



TD 1 : Programme Ex 1.2, Ex 1.3, Ex 1.4

♥ **Exercice 1.2.** On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

a) Décrire avec des mots, sans utiliser *il existe* ni *pour tout*, les ensembles suivants :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{u \in E; u_n \in \{0, 1\}\};$$

$$B = \bigcap_{M \in \mathbb{R}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \{u \in E; u_m \geq M\};$$

$$C = \bigcup_{M \in \mathbb{R}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{u \in E; u_n \geq M\}.$$

b) Réciproquement, faire l'opération de traduction inverse pour les parties suivantes de E :

F l'ensemble des suites stationnaires (c'est-à-dire constantes à partir d'un certain rang) ;

G l'ensemble des suites qui **convergent** (bonus : essayer de n'utiliser que des intersections et unions dénombrables).

$$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}\}$$

$$A = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in \{0, 1\}\}$$

A est l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$.

$$B = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : \text{pour tout } M \in \mathbb{R}, \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que} \\ \text{pour tout } m \geq n, u_m \geq M\}$$

B est l'ensemble des suites qui tendent vers $+\infty$

$$C = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : \text{il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ u_n \geq M\}$$

C est l'ensemble des suites minorées

Remarque : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{u \in E : u_n \geq M\}$ est l'ensemble des suites minorées par M .

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : (u_n) \text{ constante à partir d'un certain rang}\} \\ = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : \text{il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } m \geq N, \\ u_m = u_N\}$$

$$= \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq N} \{(u_n)_n \in E : u_m = u_N\}$$

$$G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : (u_n) \text{ converge dans } \mathbb{R}\}$$

$$= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : \text{il existe } l \in \mathbb{R} \text{ tel que } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } l\}$$

$$(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } l \stackrel{\text{d\'ef.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \text{ on a } |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$G = \bigcup_{l \in \mathbb{R}} \left(\bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{R}}} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geq N} \{ (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E : |u_n - l| \leq \varepsilon \} \right) \right) \right)$$

$$= \bigcup_{l \in \mathbb{R}} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \{ |u_n - l| \leq \varepsilon \}$$

non d\'enombrable

2^e m\'ethode: crit\'ere de Cauchy

$$(u_n) \text{ converge dans } \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m, n \geq N, \text{ on a } |u_m - u_n| \leq \varepsilon$$

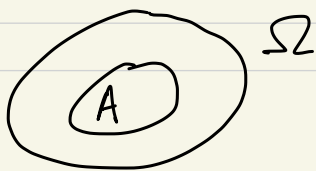
$$\iff \forall k \geq 1, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m, n \geq N \text{ on a } |u_m - u_n| \leq \frac{1}{k}$$

$$G = \bigcap_{k \geq 1} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{m \geq N} \left(\bigcap_{n \geq N} \{ |u_m - u_n| \leq \frac{1}{k} \} \right) \right) \right)$$

d\'enombrables

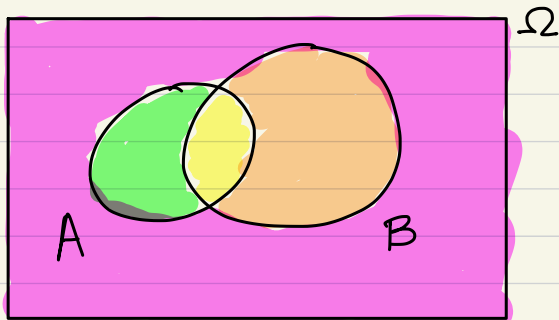
♥ **Exercice 1.3.** Soient A, B des parties d'un ensemble Ω . Dire, pour chacune des fonctions suivantes, si elle est la fonction indicatrice d'une partie de Ω , et si oui, pr\'eciser laquelle :

a) $1_A + 1_B$, b) $1_A 1_B$, c) $|1_A - 1_B|$,
d) $1_A + 1_B - 1_A 1_B$, e) $\max(1_A, 1_B)$, f) $\min(1_A, 1_B)$.



$$1_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$



$$\text{Yellow} \quad A \cap B$$

$$\text{Green} \quad A \setminus B = A \cap B^c$$

$$\text{Orange} \quad B \setminus A = B \cap A^c$$

$$\text{Pink} \quad (A \cup B)^c = \Omega \setminus (A \cup B)$$

$(1_A + 1_B)(x) = 1_A(x) + 1_B(x) = 2$ si $x \in A \cap B$
 $1_A + 1_B$ n'est pas une fonction indicatrice en général

$$1_A 1_B(x) = \begin{cases} 1 \times 1 = 1 & x \in A \cap B \\ 1 \times 0 = 0 & x \in A \setminus B \\ 0 \times 1 = 0 & x \in B \setminus A \\ 0 \times 0 = 0 & x \in (A \cup B)^c \end{cases} \Rightarrow 1_A 1_B = 1_{A \cap B}$$

$$|1_A - 1_B|(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \cap B \\ 1 & x \in A \setminus B \\ 1 & x \in B \setminus A \\ 0 & x \in (A \cup B)^c \end{cases}$$

$$\Rightarrow |1_A - 1_B| = 1_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} = 1_{A \Delta B}$$

$$1_A + 1_B - 1_A 1_B = 1_{A \cup B}$$

$$\max(1_A, 1_B) = 1_{A \cup B}$$

$$\min(1_A, 1_B) = 1_{A \cap B}$$

Remarque: La formule $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$

est liée au fait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Pareil pour $1 = 1_\Omega = 1_A + 1_{A^c}$ et $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$

♠ **Exercice 1.4.** Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des parties d'un ensemble E .

a) Montrer que $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$.

b) En déduire que $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\} \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$.

[Ce résultat sera utilisé dans l'Exemple 3.38 du poly pour démontrer rapidement la formule d'inclusion-exclusion.]

Outils de base : $1_{A^c} = 1 - 1_A$, $1_A 1_B = 1_{A \cap B}$

Pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k} \quad (*)$$

(les indices $(i_1, \dots, i_k)$ sont ceux pour lesquels on a multiplié par x_i)

$$\begin{aligned} (a) \quad 1_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= 1 - 1_{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c} = 1 - 1_{\bigcap_{i=1}^n A_i^c} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n 1_{A_i^c} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i}) \end{aligned}$$

(b) En appliquant (*), on a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i}) &= 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1_{A_{i_1}}) \dots (-1_{A_{i_k}}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} 1_{A_{i_1}} \dots 1_{A_{i_k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par (a), } 1_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= 1 - \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} 1_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} 1_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} \\ (-1)^{k+1} &= (-1)^{k-1} \end{aligned}$$

TD2 Programme : Ex1.8, Ex1.6, Ex1.11, Ex1.13

Exercice 1.8. Dans un sac de n billes numérotées de 1 à n on tire simultanément (= sans remise, sans ordre) k billes. Déterminer

a) le nombre total de tirages ;

b) le nombre de tirages contenant la bille 1 ;

c) le nombre de tirages ne contenant pas la bille 1.

↓
billes distincts $1 \leq k \leq n$

(a) Un tirage $\leftrightarrow$ un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$ à k éléments
tirages = nb. de combinaisons de k éléments parmi n

$$= \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(b) Un tirage contenant la bille 1 $\leftrightarrow$ un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$
du type $\{1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$

$$\text{\# tirages contenant la bille 1} = \binom{n-1}{k-1}$$

$$(c) \text{\# tirages ne contenant pas la bille 1} = \binom{n-1}{k}$$

2^e méthode : #tirages ne contenant pas la bille 1

$$= \boxed{\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}} = \binom{n-1}{k} \quad \text{triangle de Pascal}$$

Exercice 1.6. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Rappel: binôme de Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$$

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - \binom{n+1}{0}) = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$$

♥ Exercice 1.11. Soit Ω un ensemble.

a) Montrer que Ω n'est pas en bijection avec $\mathcal{P}(\Omega)$.

Indication : par l'absurde. Pour $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$, introduire l'ensemble $\{\omega, \omega \notin \varphi(\omega)\}$.

b) En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

(a) On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une bijection $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$. Notons $A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin \varphi(\omega)\}$

Par définition, $A \subset \Omega$ c-à-d. $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

Comme φ est surjective, il existe $a \in \Omega$ tel que $\varphi(a) = A$

Si $a \in A$, on aurait $a \notin \varphi(a) = A$ } par la déf. de A

Si $a \notin A$, on aurait $a \in \varphi(a) = A$

On a donc une contradiction, ce qui montre que Ω ne peut pas être en bijection avec $\mathcal{P}(\Omega)$

$$n \mapsto \{n\} \subset \mathbb{N}$$

injection

(b) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini ($\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}$ infini)
 d'après (a), $\mathbb{N}$ n'est pas en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
 Donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.13. Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables ou non :

- a) L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers;
- b) L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$;
- c) L'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques (voir Exercice 1.1);
- d) L'ensemble $\mathcal{M}$ des mots (finis) constitués de lettres d'un alphabet fini A ;
- e) L'ensemble $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$;
- f) L'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\{0, 1\}$;

(a) $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ dénombrable $\Rightarrow \mathcal{P}$ est dénombrable (infini)

(b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ surjection

$$(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$$

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$ dénombrables, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dénombrable

Donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable

(c) polynôme $Q \in \mathbb{Q}[X]$

$$E_Q = \{x \in \mathbb{C} : Q(x) = 0\}$$

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\substack{Q \in \mathbb{Q}[X] \\ Q \neq 0}} E_Q \subset \mathbb{C}$$

$\leftarrow$ cette union n'est pas disjointe

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X] \quad (\text{cette union est disjointe})$$

$$\mathbb{Q}_n[X] = \{ \text{polynômes de degré } n \text{ à coefficients rationnels} \}$$

$\mathbb{Q}_n[x]$ en bijection avec $\underbrace{\mathbb{Q}^* \times \underbrace{\mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}}_{n \text{ fois}}}_{\text{est dénombrable}}$

$\Rightarrow \mathbb{Q}_n[x]$ est dénombrable

$\mathbb{Q}[x] = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[x]$ est dénombrable

$\nwarrow$ union dénombrable

$\mathbb{Q} \in \mathbb{Q}_n[x] \quad |E_{\mathbb{Q}}| \leq n$

Par conséquent, $\mathcal{A}$ est l'union dénombrable des ensembles finis
Il est donc dénombrable.

(d) $M_n =$ l'ensemble des mots de longueur n , $n \geq 0$
($M_0 = \{\emptyset\}$)

$M = \bigcup_{n \geq 0} M_n$ (union disjointe)

M_n en bijection avec A^n , donc fini ($|A^n| = |A|^n$)

Donc M est l'union dénombrable des ensembles finis

M est dénombrable.

(e) $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}(\{0, 1, \dots, n\})$ (pourquoi?)

$|\mathcal{P}(\{0, 1, \dots, n\})| = 2^{n+1}$ car $\mathcal{P}(\{0, 1, \dots, n\})$ en bijection avec $\{0, 1\}^{n+1}$

Donc $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ est dénombrable

(f) $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ non plus.

TD3: Programme Ex 2.1, Ex 2.2, Ex 2.3

♥ **Exercice 2.1.** On lance simultanément un dé à n faces et un dé à m faces, avec $m \leq n$.

- Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour décrire cette expérience aléatoire.
- Quelle est la probabilité que le premier dé donne un résultat inférieur (ou égal) au second.

Solution: a) espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ (i, j) : \begin{array}{l} i = \text{résultat du dé à } n \text{ faces} \\ j = \text{résultat du dé à } m \text{ faces} \end{array} \right\} \\ &= \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}\end{aligned}$$

$$|\Omega| = nm < +\infty$$

$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\Omega)$ comme Ω est fini

$\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω

b) $A = \text{"le dé à } n \text{ faces donne un résultat } \leq \text{résultat du dé à } m \text{ faces"}$
 $= \{(i, j) \in \Omega : i \leq j\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{Question: calculer } |A| ?$$

Note $A_k = \{(i, k) \in A\} = \{1, 2, \dots, k\} \times \{k\}$

pour $1 \leq k \leq m (\leq n)$

$$|A_k| = k \times 1 = k$$

$$A = \bigsqcup_{1 \leq k \leq m} A_k \quad \text{en union disjointe}$$

$$|A| = \sum_{k=1}^m |A_k| = \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m+1}{2n}$$

Exercice 2.2. On tire deux cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? Si l'on n'a pas obtenu une paire, on a le choix entre jeter l'une des deux cartes tirées et en retirer une parmi les 30 restantes, ou jeter les deux cartes tirées et en retirer deux parmi les 30 restantes. Quelle stratégie donne la plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin ?

Jeu à 32 cartes: 8 valeurs $\times$ 4 couleurs

Chaque valeur fixée, 4 cartes de couleur différente

Chaque couleur fixée, 8 cartes de valeur différente.

(Jeu à 52 cartes : 13 valeurs $\times$ 4 couleurs)

Solution: Pour le tirage de 2 cartes d'un jeu de 32,

Ω = l'ensemble des tirages de 2 cartes **non ordonnées** parmi 32

$$|\Omega| = \binom{32}{2} = \frac{32 \times 31}{2} = 16 \times 31 < +\infty$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$\mathbb{P}$ la probabilité uniforme

A = "on tire une paire (cà-d. 2 cartes de même valeur)"

$$|A| = 8 \times \binom{4}{2}$$

$\uparrow$ 8 choix pour la valeur $\leftarrow$ le nb. de choix pour les deux couleurs

$$|A| = 8 \times \frac{4 \times 3}{2} = 8 \times 6 = 48$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{48}{16 \times 31} = \frac{3}{31}$$

Maintenant, suppose qu'on n'a pas obtenu de paire.

1^{re} stratégie: Ω_1 = l'ensemble des tirages de 1 carte parmi 30.

$|\Omega_1| = 30$ $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$ $\mathbb{P}$ proba. uniforme sur Ω_1

$A = \text{"on tire une paire"} \subset \Omega_1$

Comme on connaît la valeur de la carte gardée,

$$|A| = 3 = 4 - 1$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega_1|} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

2^e stratégie: $\Omega_2 =$ l'ensemble des tirages de 2 cartes non ordonnées
parmi 30

$$|\Omega_2| = \binom{30}{2} = \frac{30 \times 29}{2} = 15 \times 29$$

$\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$, $\mathbb{P}$ proba. uniforme

$A = \text{"on tire une paire"} \subset \Omega_2$

$$|A| = 2 \times \binom{3}{2} + 6 \times \binom{4}{2} = 6 + 36 = 42$$

on choisit une
des deux valeurs
des cartes jetées

on choisit une des
6 autres valeurs

$$\mathbb{P}(A) = \frac{42}{15 \times 29} = \frac{14}{145} < \frac{1}{10}$$

Conclusion: la 1^e stratégie est meilleure.

Exercice 2.3. On considère un paquet de 52 cartes de Poker, et on choisit 5 cartes au hasard. Calculer la probabilité que :

- a) parmi les 5 cartes, il y ait **au moins** une paire (c'est-à-dire deux cartes de même valeur) ;
- b) parmi les 5 cartes, il y ait **exactement** une paire, c'est-à-dire une paire, mais aucune combinaison meilleure (double paire, tierce....)

$\Omega =$ l'ensemble des tirages de 5 cartes non ordonnées parmi 52

$$|\Omega| = \binom{52}{5} < +\infty \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P} \text{ proba. uniforme.}$$

Rappel: 13 valeurs $\times$ 4 couleurs = 52

(a) A = l'ensemble des tirages où il y a **au moins** une paire

A^c = l'ensemble des tirages **sans paire**

A^c plus facile
à dénombrer que A

$$|A^c| = \binom{13}{5} \times 4^5$$

↑
choix de valeurs différentes
pour les 5 cartes tirées

↑
choix de couleurs pour
les 5 cartes

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{13}{5} \times 4^5}{\binom{52}{5}} \\ &= 1 - \frac{4^3 \times 3 \times 11}{5 \times 17 \times 49} \approx 0,4929 \end{aligned}$$

(b) B = l'ensemble des tirages avec **exactement** une paire

$$|B| = 13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3$$

↑
choix de valeur
pour la paire

↑
choix des
couleurs pour
cette paire

↑
choix des
valeurs pour
les 3 autres cartes

↑
choix des
couleurs pour
ces 3 cartes

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3}{\binom{52}{5}}$$

$$= \frac{4^2 \times 2 \times 11}{17 \times 49} \approx 0,4226$$

TD4: Programme Ex 2.7, Ex 2.8, Ex 2.9

♥ **Exercice 2.7.** On considère une suite $(A_k)_{k \geq 1}$ d'événements. Montrer que

a) si $\mathbb{P}(A_k) = 0$ pour tout k , alors $\mathbb{P}(\bigcup_{k \geq 1} A_k) = 0$;

b) si $\mathbb{P}(A_k) = 1$ pour tout k , alors $\mathbb{P}(\bigcap_{k \geq 1} A_k) = 1$.

Preuve: (a) Par la sous-additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k \geq 1} 0 = 0$$

Comme $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) \geq 0$, on a nécessairement $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = 0$

(b) En passant au complémentaire, $\mathbb{P}(A_k^c) = 1 - \mathbb{P}(A_k) = 0$
pour tout k

Alors par (a), $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k^c\right) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k^c\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k^c\right) \\ &= 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Remarque: Avec les même idée, on peut aussi faire l'exercice 2.5:

(1) Si $\mathbb{P}(C) = 0$, alors $\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$

(2) Si $\mathbb{P}(C) = 1$, alors $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$

♡ **Exercice 2.8. Inégalité de Bonferroni** Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j). \quad \text{minoration}$$

Rappel: Formule d'inclusion-exclusion

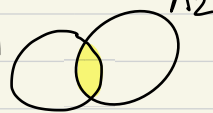
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \underbrace{\sum_{k=3}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})}_{\geq 0 \text{ dit l'inégalité de Bonferroni}} \end{aligned}$$

Sous-additivité de $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$ majoration

Preuve de l'inégalité de Bonferroni par récurrence:

$$n=2 \quad \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

Supposons que cette inégalité est vraie pour n événements A_1



$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)}_{\text{hypothèse de récurrence}} - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \\ &\geq \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \end{aligned}$$

Par la sous-additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap A_{n+1})$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &\geq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \end{aligned}$$

♠ **Exercice 2.9.** Soit Ω un ensemble fini, et soit $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction arbitraire fixée. Pour $\beta \geq 0$ un paramètre fixé, on définit la probabilité $\mathbb{P}_\beta$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par sa valeur sur les singletons $\{\omega\}$:

$$\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) := \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(\omega)}, \quad \text{où } Z_\beta := \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}.$$

La probabilité $\mathbb{P}_\beta$ est appelée *mesure de Gibbs*.*

- Vérifier que cela définit bien une probabilité sur Ω .
- Montrer que si $\beta = 0$, $\mathbb{P}_\beta$ est la probabilité uniforme sur Ω .
- Considérons maintenant la limite $\beta \rightarrow \infty$. On note $m := \min\{H(\omega) : \omega \in \Omega\}$ le minimum absolu de H , et $M := \{\omega \in \Omega : H(\omega) = m\}$, l'ensemble (non vide) des éléments de Ω d'énergie minimale. Montrer que pour tout $\omega \notin M$, on a $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = 0$. En déduire que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\beta(M) = 1$.
- Montrer que pour tout $\omega \in M$, on a $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{|M|}$.

Remarque: ω état d'un système physique

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &H(\omega) \in \mathbb{R} \quad \text{son "énergie"} \\ &\beta \geq 0 \quad \beta = (k_B \cdot T)^{-1} \quad T \text{ "température"} \\ &e^{-\beta H(\omega)} \quad \text{grand lorsque } H(\omega) \text{ petite.} \quad k_B \text{ constante de Boltzmann.} \\ &\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) \quad \text{grande lorsque } H(\omega) \text{ petite} \\ &\beta = 0 \leftrightarrow T = +\infty \\ &\beta \rightarrow +\infty \leftrightarrow T \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Solution: (a) Il suffit de vérifier que

$$P_{\beta}(\{\omega\}) = \frac{1}{Z_{\beta}} e^{-\beta H(\omega)} \quad \text{où } Z_{\beta} = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}$$

est bien une densité discrète sur Ω :

$$P_{\beta}(\{\omega\}) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} P_{\beta}(\{\omega\}) &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{Z_{\beta}} e^{-\beta H(\omega)} \\ &= \frac{1}{Z_{\beta}} \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)} = \frac{1}{Z_{\beta}} \cdot Z_{\beta} = 1 \end{aligned}$$

(b) Pour $\beta=0$, $e^{-\beta H(\omega)} = e^{-0} = 1$ pour tout $\omega \in \Omega$

$$Z_{\beta=0} = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)} = \sum_{\omega \in \Omega} 1 = |\Omega| (< +\infty)$$

Donc pour tout $\omega \in \Omega$,

$$P_{\beta=0}(\{\omega\}) = \frac{1}{Z_{\beta=0}} e^{-\beta H(\omega)} = \frac{1}{|\Omega|}$$

c-à-d. $P_{\beta=0}$ est la probabilité uniforme sur Ω .

(c) énergie minimale $m = \min \{H(\omega) : \omega \in \Omega\}$

$$M = \{\omega \in \Omega : H(\omega) = m\} \subset \Omega$$

Comme Ω fini, H doit atteindre son minimum, $M \neq \emptyset$

$\forall \omega \notin M$, on note $H(\omega) =: m' > m$

$$\begin{aligned} Z_{\beta} &= \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)} \geq \sum_{\omega \in M} e^{-\beta H(\omega)} = \sum_{\omega \in M} e^{-\beta m} \\ &= |M| e^{-\beta m} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 \leq P_\beta(\{\omega\}) &= \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(\omega)} = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta m'} \\
 &= \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta(m + \underbrace{m' - m}_{>0})} \\
 &\leq \frac{1}{|M| e^{-\beta m}} e^{-\beta(m + m' - m)} = \frac{1}{|M|} e^{-\beta(\underbrace{m' - m}_{>0})}
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_\beta(\{\omega\}) = 0$ pour tout $\omega \in M$
 Comme Ω est fini,

$$P_\beta(M^c) = \sum_{\omega \in M^c} P_\beta(\{\omega\}) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0$$

En passant au complémentaire,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_\beta(M) &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (1 - P_\beta(M^c)) \\
 &= 1 - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_\beta(M^c) = 1
 \end{aligned}$$

(d) $\forall \omega \in M, P_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta m}$ ne dépend pas de ω dans M
 $=: q_\beta$ constante

$$P_\beta(M) = \sum_{\omega \in M} P_\beta(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in M} q_\beta = |M| \cdot q_\beta$$

Comme $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_\beta(M) = 1$, on en déduit que $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} q_\beta = \frac{1}{|M|}$
 c-à-d. $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{|M|}, \forall \omega \in M.$

TD5 : Programme Ex 3.2, Ex 3.3 et Ex 3.6

♥ **Exercice 3.2.** On propose un QCM à un étudiant : 5 réponses possibles sont proposées. L'étudiant connaît (et donne) la bonne réponse avec probabilité p , et s'il ne la connaît pas, il choisit une des 5 possibilités au hasard.

- Quelle est la probabilité que la réponse donnée par l'étudiant soit la bonne ?
- Le correcteur, une fois la copie en main, voit que l'étudiant a donné la bonne réponse. Quelle est la probabilité que l'étudiant connaissait en effet la bonne réponse ?

A = "l'étudiant donne la bonne réponse"

B = "l'étudiant connaît la bonne réponse"

On sait que $\mathbb{P}(B) = p \in [0, 1]$ ($\Rightarrow \mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - p$)

$$\mathbb{P}(A|B) = 1$$

$$\mathbb{P}(A|B^c) = \frac{1}{5}$$

(a) B et B^c forment une partition de Ω

Par la formule de probabilité totale

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

$$(\quad = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) \quad)$$

$$= 1 \times p + \frac{1}{5} \times (1 - p) = \frac{4p + 1}{5}$$

(b) On cherche

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= 1 \times p \times \left(\frac{4p + 1}{5}\right)^{-1} = \frac{5p}{4p + 1} \end{aligned}$$

Formule
de Bayes

♥ **Exercice 3.3.** (*Paradoxe des trois cartes*) On place dans un sac trois cartes : une qui a deux faces rouges, une qui a deux faces noires, et une dernière qui a une face rouge et une face noire. Les yeux fermés, on tire une carte au hasard, et on la dépose sur la table sur une face au hasard. À ce moment-là, on ouvre les yeux. Si la face que l'on voit est rouge, quelle est la probabilité que l'autre face soit rouge ?

Carte N°1 : deux faces rouges

Carte N°2 : deux faces noires

Carte N°3 : une face rouge et une face noire

Une réponse intuitive : la probabilité recherchée vaut ~~$\frac{1}{2}$~~ car seulement la carte N°1 et la carte N°3 peuvent être sur la table et une seule d'entre ces 2 cartes est rouge de l'autre côté.

Or cette réponse n'est pas correcte car sachant que la face visible est rouge, il n'est pas équiprobable d'avoir tiré la carte N°1 ou N°3. En fait $P(\text{on tire carte N°1} \mid \text{la face visible est rouge}) = 2 \times P(\text{on tire carte N°3} \mid \text{la face visible est rouge})$

Calcul correct : $R = \text{"le côté visible de la carte tirée est rouge"}$

$1 \leq i \leq 3$ $A_i = \text{"on tire la carte N°i"}$

On cherche à calculer $P(A_1 \mid R)$:

$$P(A_1 \mid R) = \frac{P(A_1) P(R \mid A_1)}{P(R)} \quad (\text{Bayes})$$

$$= \frac{P(A_1) P(R \mid A_1)}{P(A_1) P(R \mid A_1) + P(A_2) P(R \mid A_2) + P(A_3) P(R \mid A_3)}$$

(proba. totales)

$$= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

Exercice 3.6. Soit $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $\Omega := \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω . Ainsi, les éléments de Ω sont des couples (A, B) , où A, B sont des sous-ensembles de S . On considère l'événement $E := \{(A, B) \in \Omega : A \subseteq B\}$.

a) Pour $C \subseteq S$, on pose $F_C := \{(A, B) \in \Omega; B = C\}$. Déterminer $\mathbb{P}(E|F_C)$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(E) = (\frac{3}{4})^n$.

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathbb{P}(E|F_C) &= \frac{\mathbb{P}(E \cap F_C)}{\mathbb{P}(F_C)} = \frac{\frac{|E \cap F_C|}{|\Omega|}}{\frac{|F_C|}{|\Omega|}} \\ &= \frac{|E \cap F_C|}{|F_C|} \end{aligned}$$

$C \subseteq S$ fixé

$$\begin{aligned} |F_C| &= |\{(A, B) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S); B = C\}| \\ &= |\{(A, C) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)\}| \\ &= |\{A \in \mathcal{P}(S)\}| = |\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|} = 2^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E \cap F_C| &= |\{(A, C) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) : A \subseteq C\}| \\ &= |\{A \subseteq C\}| = |\mathcal{P}(C)| = 2^{|C|} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(E|F_C) = 2^{|C| - n}$$

(b) la famille $\{F_C, C \subseteq S\} = \{F_C, C \in \mathcal{P}(S)\}$ est une partition de Ω : $\forall C \neq C' \quad F_C \cap F_{C'} = \emptyset$

$$\bigcup_{C \subseteq S} F_C = \Omega$$

$$\mathbb{P}(F_C) = \frac{|F_C|}{|\Omega|} = \frac{2^n}{2^n \times 2^n} = 2^{-n}, \forall C \subseteq \Omega$$

Par la formule de probabilités totales

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{C \subset S} \mathbb{P}(F_C) \mathbb{P}(E|F_C) = \sum_{C \subset S} 2^{-n} 2^{|C|-n}$$

$$= 4^{-n} \cdot \sum_{C \subset S} 2^{|C|} = 4^{-n} \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{C \subset S \\ |C|=k}} 2^{|C|}$$

$$= 4^{-n} \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{C \subset S \\ |C|=k}} 2^k = 4^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

binôme de Newton

$$\downarrow = 4^{-n} (2+1)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

TD6: Programme Exercice 3.8, 3.9 et 3.10

Exercice 3.8. Soient A, B, C trois événements dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que A, B, C sont indépendants. Montrer que a) $A \cap B$ est indépendant de C ; b) $A \cup B$ est indépendant de C .

$$A, B, C \text{ sont indép.} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(C) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C) & (4) \end{cases}$$

$$(a) \mathbb{P}((A \cap B) \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

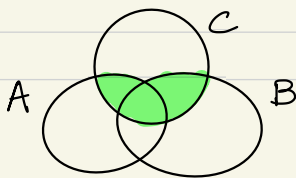
$$\stackrel{(1)}{=} \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(C) \quad \text{Donc } A \cap B \text{ est indép. de } C$$

$$(b) \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C \cap (B \cap C))$$

$$= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$



Donc en appliquant (3), (4) et (1), on a

$$\begin{aligned}P((A \cup B) \cap C) &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\&= P(C)[P(A) + P(B) - P(A)P(B)] \\&\stackrel{(2)}{=} P(C)[P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\&= P(C)P(A \cup B)\end{aligned}$$

$\Rightarrow A \cup B$ et C sont indép.

♥ **Exercice 3.9.** Que peut-on dire d'un événement qui est indépendant de lui-même ?

Si $A \in \mathcal{F}$ est indép de lui-même, alors $P(A \cap A) = P(A)P(A)$
c-à-d. $P(A) = P(A)^2$

Comme l'équation $x = x^2$, $x \in [0, 1]$ admet deux solutions
 $x = 0$ et $x = 1$, on en déduit que $P(A) \in \{0, 1\}$

Conclusion: un événement qui est indép de lui-même est
soit *négligeable* soit *presque sûr*.

 $P(A) \in \{0, 1\} \not\Rightarrow A = \emptyset \text{ ou } \Omega$

♥ **Exercice 3.10.** Dans une urne qui contient k boules rouges et n boules vertes ($n, k \geq 1$), on tire une première boule, puis sans la remettre dans l'urne, on en tire une deuxième. On considère les événements $A_1 :=$ "la première boule tirée est rouge", $A_2 :=$ "la deuxième boule tirée est rouge". Montrer que les événements A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

Il faut montrer que $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$

Réponse: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{k}{k+n}$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{k(k-1)}{(k+n)(k+n-1)}$$

Méthode 1: k boules rouges, n boules vertes, $n+k$ au total

$$P(A_1) = \frac{k}{n+k}$$

$$P(A_2) = P(A_1) P(A_2|A_1) + P(A_1^c) P(A_2|A_1^c)$$

$$= \frac{k-1}{n+k-1} + \left(1 - \frac{k}{n+k}\right) \frac{k}{k+n-1}$$

$$= \frac{k}{n+k}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2|A_1) = \frac{k}{n+k} \frac{k-1}{n+k-1}$$

Méthode 2: On numérote les boules de 1 à $n+k$

les N° de 1 à k sont rouges, les N° de $k+1$ à $k+n$ sont vertes.

L'espace d'états $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{1, \dots, n+k\}, x \neq y\}$

$\uparrow$ N° de la 1^{ère} boule $\uparrow$ N° de la 2^{ème} boule

$\uparrow$ "sans remise"

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

P est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

$$A_1 = \{(x, y) \in \Omega : 1 \leq x \leq k\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \Omega : 1 \leq y \leq k\},$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(x, y) \in \{1, \dots, k\}^2 : x \neq y\}$$

$$|\Omega| = (n+k)(n+k-1)$$

$$|A_1| = k(n+k-1)$$

$$|A_1 \cap A_2| = k(k-1)$$

$$|A_2| = (n+k-1)k$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{k(n+k-1)}{(n+k)(n+k-1)} = \frac{k}{n+k}$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{(n+k-1)k}{(n+k)(n+k-1)} = \frac{k}{n+k}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \frac{k(k-1)}{(n+k)(n+k-1)}$$

Remarque Si on tire plus de boules dans l'urne sans remise, la probabilité que la j -ème boule soit rouge vaut toujours $\frac{k}{n+k}$ pour tout $1 \leq j \leq n+k$.

Exercice 3.11. On effectue des lancers successifs (indépendants) de dés : pour le n^{e} lancer, on utilise un dé à $n+1$ faces équiprobables.

a) On note A_n l'événement "le n^{e} dé tombe sur 1". On note $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Interpréter l'événement A et montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

b) On note $B = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} A_n$. Interpréter l'événement B et montrer que $\mathbb{P}(B) = 1$.

(a) A = "au moins un dé tombe sur 1"

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$$

Les $A_n, n \geq 1$ ne sont pas disjoints

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^k A_n^c\right)$$

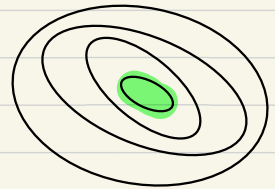
$$= 1 - \prod_{n=1}^k \mathbb{P}(A_n^c) \quad \text{indép de } (A_n, n \geq 1)$$

$$= 1 - \prod_{n=1}^k \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

(b) $\bigcup_{n \geq k} A_n =$ "au moins un dé tombe sur 1 à partir de k^{e} lancer"

$\bigcap_{k \geq 1} \left(\bigcup_{n \geq k} A_n \right) =$ "il y a une infinité de dés qui donnent 1"

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} \left(\bigcup_{n \geq k} A_n\right)\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq k} A_n\right) \end{aligned}$$



Par le même argument que (a), on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq k} A_n\right) = 1, \forall k \geq 1$

Donc $\mathbb{P}(B) = 1$

(à détailler)

TD7 : Exercices 4.1, 4.4, 4.7, 4.8

Exercice 4.1. On considère trois groupes d'étudiants : il y a 30 étudiants dans le groupe A, 40 dans le groupe B, et 50 dans le groupe C. On procède à deux expériences différentes.

- On choisit un groupe au hasard, et on note X le nombre d'étudiants dans le groupe. Donner la loi de X .
- On choisit un étudiant au hasard, et on note Y le nombre d'étudiants dans le groupe de cet étudiant. Donner la loi de Y .

a) X à valeurs dans $\{30, 40, 50\}$

$$\mathbb{P}(X=30) = \mathbb{P}(\{\text{groupe A est choisi}\}) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X=40) = \mathbb{P}(\{\text{groupe B est choisi}\}) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X=50) = \frac{1}{3}$$

b) $\# \text{étudiants} = 30 + 40 + 50 = 120$

X à valeurs dans $\{30, 40, 50\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=30) &= \mathbb{P}(\{\text{l'étudiant choisi au hasard est dans groupe A}\}) \\ &= \frac{\# \text{étudiants de groupe A}}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y=40) = \frac{\# \text{étudiants dans le groupe B}}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Y=50) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

♥ **Exercice 4.4.** Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer la probabilité de l'événement : " X est un multiple de k ", pour $k \geq 2$.

Par définition, X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n) = (1-p)^{n-1} p$$

X est le premier instant de succès lors d'épreuves **indép** de proba. de succès p

$$a) \{X > n\} = \bigsqcup_{i=n+1}^{+\infty} \{X=i\}$$

additivité de $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > n) &= \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \\ &= (1-p)^n p \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \\ &= (1-p)^n \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

L'autre méthode:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > n) &= \mathbb{P}(\{\text{les } n \text{ premières épreuves sont des échecs}\}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{i^{\text{ème}} \text{ épreuve est un échec}\}) \\ &= \prod_{i=1}^n (1-p) = (1-p)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \mathbb{P}(X \in \{k, 2k, 3k, \dots\}) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = ik) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{ik-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{ik} = \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{+\infty} ((1-p)^k)^i \\
 &= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^k}{1 - (1-p)^k}, \quad k \geq 2
 \end{aligned}$$

Exercice 4.7. Soient A et B deux événements. Déterminer la loi du vecteur $(1_A, 1_B)$. À quelle condition les variables aléatoires 1_A et 1_B sont-elles indépendantes ?

$(1_A, 1_B)$ à valeurs dans $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$$\mathbb{P}((1_A, 1_B) = (0,0)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \notin A, \omega \notin B\}) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$$

$$\mathbb{P}((1_A, 1_B) = (0,1)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \notin A, \omega \in B\}) = \mathbb{P}(A^c \cap B)$$

$$\mathbb{P}((1_A, 1_B) = (1,0)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \notin B\}) = \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

$$\mathbb{P}((1_A, 1_B) = (1,1)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B\}) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

1_A et 1_B indép (noté $1_A \perp\!\!\!\perp 1_B$) $\Leftrightarrow$ A et B indép (noté $A \perp\!\!\!\perp B$)

Preuve: Si $1_A \perp\!\!\!\perp 1_B$,

$$\mathbb{P}((1_A, 1_B) = (1,1)) = \mathbb{P}(1_A = 1) \mathbb{P}(1_B = 1)$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \mathbb{P}(A \cap B) & \stackrel{=}{=} & \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \end{array}$$

ce qui montre que $A \perp\!\!\!\perp B$

Réciproquement, si $A \perp\!\!\!\perp B$, alors $A^c \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp B^c$ et $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$
ceci implique que $\forall (x,y) \in \{0,1\}^2$,

$$\mathbb{P}((1_A, 1_B) = (x,y)) = \mathbb{P}(1_A = x) \mathbb{P}(1_B = y)$$

Donc $1_A \perp\!\!\!\perp 1_B$

Remarque $A_1, \dots, A_n$ événements. On a l'équivalence

$1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}$ sont indép. $\Leftrightarrow A_1, \dots, A_n$ sont indép.

Exercice 4.8. Soit n un entier, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$: pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}$.

a) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X > Y)$.

b) On pose $Z = \min\{X, Y\}$. Calculer $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Remarque : La loi jointe : $\forall j, k \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) = \underset{\text{indép}}{\mathbb{P}(X=j)} \mathbb{P}(Y=k) = \underset{\text{lois marginales}}{\frac{1}{n^2}}$$

(X, Y) suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}^2$.

Solution a) $\{X=Y\} = \bigsqcup_{k=1}^n \{X=k \text{ et } Y=k\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X=k, Y=k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X=k) \mathbb{P}(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\{X > Y\} = \bigsqcup_{1 \leq j < k \leq n} \{X=k \text{ et } Y=j\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > Y) &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathbb{P}(X=k, Y=j) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{n^2} \\ &= \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

2^e méthode : $\{X > Y\} = \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} \{X > i, Y=i\} = \bigsqcup_{1 \leq i \leq n-1} \{X > i, Y=i\}$

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X > i, Y=i) \stackrel{\text{X et Y}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X > i) \mathbb{P}(Y=i)$$

$$\mathbb{P}(X > i) = \sum_{j=i+1}^n \mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{n} = \frac{n-i}{n}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X > Y) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} \\ = \frac{n-1}{2n}$$

3^e méthode: $\Omega = \{X > Y\} \cup \{X = Y\} \cup \{X < Y\}$ en union disjointe

Par symétrie entre X et Y , $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X < Y)$

$$\text{d'où } 2\mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X = Y) = 1$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X > Y) = \frac{1}{2} (1 - \mathbb{P}(X = Y)) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{2n}$$

$$b) Z = \min\{X, Y\}, k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\{Z = k\} = \{X = k, Y > k\} \sqcup \{X = k, Y = k\} \sqcup \{X > k, Y = k\}$$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k, Y > k) + \mathbb{P}(X = k, Y = k) + \mathbb{P}(X > k, Y = k) \\ \stackrel{\text{union disjointe}}{=} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y > k) + \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) + \mathbb{P}(X > k) \mathbb{P}(Y = k) \\ \stackrel{\text{X et Y}}{=} \frac{1}{n} \frac{n-k}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-k}{n} \frac{1}{n} \\ = \frac{2(n-k) + 1}{n^2}$$

TD8: Ex 4.9, Ex 4.10, Ex 4.11

♥ **Exercice 4.9.** Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique, de paramètres respectifs $p \in]0, 1[$ et $q \in]0, 1[$. On pose $Z = \min\{X, Y\}$.

a) Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que Z suit une loi géométrique, dont on déterminera le paramètre.

$$a) \{Z > n\} = \{X > n\} \cap \{Y > n\} = \{X > n \text{ et } Y > n\} \\ \mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(X > n \text{ et } Y > n) \stackrel{\text{X et Y}}{=} \mathbb{P}(X > n) \mathbb{P}(Y > n) \\ = (1-p)^n (1-q)^n \quad (\text{voir Ex 4.4}) \\ = ((1-p)(1-q))^n$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \forall n \geq 1 \quad \{Z=n\} &= \{Z > n-1\} \setminus \{Z > n\} \\
 \mathbb{P}(Z=n) &= \mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n) \\
 &= ((1-p)(1-q))^{n-1} - ((1-p)(1-q))^n \\
 &= (1-p)(1-q)^{n-1} (1 - (1-p)(1-q)) \\
 &=: r^{n-1} (1-r)
 \end{aligned}$$

avec $r = (1-p)(1-q)$

Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $1-r$
 $1-r = p+q - pq$

♡ **Exercice 4.10.** (Indépendance et indépendance deux à deux). Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$, telles que $\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, pour $i = 1, 2$.

- Montrer que la variable aléatoire $X_1 X_2$ est indépendante d'une part de X_1 , et d'autre part de X_2 .
- La variable aléatoire $X_1 X_2$ est-elle indépendante du couple (X_1, X_2) ?

a) $X_1, X_2, X_1 X_2 \in \{-1, +1\}$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) + \mathbb{P}(X_1=-1, X_2=-1) \\
 &\stackrel{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \mathbb{P}(X_1=1) \mathbb{P}(X_2=1) + \mathbb{P}(X_1=-1) \mathbb{P}(X_2=-1) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_1 X_2 = -1) = \frac{1}{2}$$

$$\forall (x_1, x_2) \in \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_1 X_2 = x_1, X_1 = x_2) &= \mathbb{P}(X_1 = x_2, X_2 = x_1 x_2^{-1}) \\
 &\stackrel{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \mathbb{P}(X_1 = x_2) \mathbb{P}(X_2 = x_1 x_2^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(X_1 X_2 = x_1, X_1 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = x_1) \mathbb{P}(X_1 = x_2)$
pour tous $x_1, x_2 \in \{\pm 1\}$

Ainsi $X_1 X_2$ est indép. de X_1

De même, $X_1 X_2$ est indép. de X_2

$$b) \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1, (X_1, X_2) = (-1, 1)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\text{Or } \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}((X_1, X_2) = (-1, 1)) = \mathbb{P}(X_1 = -1) \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X_1 X_2 = 1, (X_1, X_2) = (-1, 1)) \neq \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) \mathbb{P}((X_1, X_2) = (-1, 1))$$

Donc $X_1 X_2$ n'est pas indép. de (X_1, X_2)

♥ **Exercice 4.11.** On lance un dé à six faces de manière répétée, et on note X_k le résultat du k -ème lancer, pour $k \geq 1$. Alice regarde les résultats des lancers, en attendant le premier instant T où sort un numéro $\{1, 2, 3, 4\}$. Quand cela arrive, elle note le numéro sorti $Y := X_T$.

a) Pour tout $n \geq 1$, exprimer l'événement $\{T = n\}$ en termes des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$. En déduire la densité discrète de T , et la reconnaître.

b) Pour tout $n \geq 1$ et $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, exprimer l'événement $\{T = n, Y = i\}$ en termes des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$. En déduire la loi jointe des variables T et Y .

c) Déterminer la loi de Y . Les variables aléatoires T et Y sont-elles indépendantes?

$(X_1, X_2, \dots)$ suite de v.a. indép. de loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$

$T \geq 1$ v.a. discrète

$$Y := X_T : \Omega \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ v.a. } \left(X_k : \Omega \longrightarrow \{1, \dots, 6\} \right)$$

$$\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega) \quad \omega \mapsto X_k(\omega)$$

$$a) \{T=n\} = \{X_1 \in \{5, 6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5, 6\}, X_n \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(X_1 \in \{5, 6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5, 6\}, X_n \in \{1, 2, 3, 4\})$$

indép

$$= \mathbb{P}(X_1 \in \{5, 6\}) \cdots \mathbb{P}(X_{n-1} \in \{5, 6\}) \mathbb{P}(X_n \in \{1, 2, 3, 4\})$$

$$= \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \times \frac{4}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

$\Rightarrow T$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

b) Pour $n \geq 1$ et $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\{T=n, Y=i\} = \{X_1 \in \{5, 6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5, 6\}, X_n = i\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T=n, Y=i) &= \mathbb{P}(X_1 \in \{5, 6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5, 6\}, X_n = i) \\ &\stackrel{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_1 \in \{5, 6\}) \dots \mathbb{P}(X_{n-1} \in \{5, 6\}) \mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6} \end{aligned}$$

c) Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\{Y=i\} = \bigsqcup_{n \geq 1} \{T=n, Y=i\} \quad \begin{array}{l} \text{l'union est disjointe} \\ \text{et dénombrable} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_T=i) &= \mathbb{P}(Y=i) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T=n, Y=i) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T=n, X_T=i) \\ &\stackrel{\text{question (b)}}{=} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T=n, X_n=i) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc Y est uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$

$\forall n \geq 1, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, par les calculs ci-dessus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T=n) \mathbb{P}(Y=i) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} \\ &= \mathbb{P}(T=n, Y=i) \end{aligned}$$

Cela montre que T et Y sont indép.

Remarque " $Y = X_T$ n'est pas indép du vecteur infini $(T, X_1, X_2, \dots)$ "

TD9: Ex 5.1, Ex 5.2

♥ **Exercice 5.1.** Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$, lorsque X est une variable aléatoire de loi : a) uniforme sur $\{1, \dots, n\}$; b) $\text{Bern}(p)$; c) $\text{Bin}(n, p)$; d) $\text{Géom}(p)$; e) $\text{Poi}(\lambda)$.

a) $X \sim \text{Unif}$ sur $\{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k p_X(k) = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} : \quad (k-1)^2 = k^2 - 2k + 1$$

$$k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$$

$$\sum_{k=1}^n (k^2 - (k-1)^2) = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

$$\parallel$$

$$n^2$$

$$\parallel$$

$$2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1$$

Donc $2 \sum_{k=1}^n k = n^2 + n$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X) \cdot X + \mathbb{E}(X)^2)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 p_X(k) \quad (\text{formule de transfert})$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} : \text{ même méthode}$$

$$(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$$

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

$$\sum_{k=1}^n (k^3 - (k-1)^3) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = \overset{\parallel}{n^3} + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2 - 1}{12} \end{aligned}$$

b) $X \sim \text{Bern}(p)$, $0 \leq p \leq 1$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X=1) = p \quad (X=X^2 \Rightarrow \mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X^2))$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

c) $X \sim \text{Bin}(n, p)$

On suppose que $X = X_1 + \dots + X_n$

où $X_1, \dots, X_n$ v.a. indép, de même loi $\text{Bern}(p)$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) \quad \begin{array}{l} \text{(linéarité de l'espérance)} \\ \text{sans utiliser l' indép des } X_i \end{array}$$

Donc $E(X) = np$

Corollaire 3.49 : Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. indépendantes admettant un moment d'ordre 2 fini, alors

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

Donc $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p)$.

indép $X_i \sim \text{Bern}(p)$

2^{ème} méthode

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k p_X(k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
(déjà vu dans l'Ex. 1.6)

$$= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np (p + (1-p))^{n-1}$$

binôme de Newton

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 p_X(k) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n k n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} \quad \text{changement de variable } j=k-1 \\
&= np \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}}_{(n-1)p} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}}_{(p+(1-p))^{n-1}} \right) \\
&= np ((n-1)p + 1) = n^2 p^2 + np(1-p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= n^2 p^2 + np(1-p) - (np)^2 \\
&= np(1-p).
\end{aligned}$$

d) $X \sim \text{Geom}(p)$, $0 < p < 1$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P_X(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1} p = p \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1}$$

On considère $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ série entière
rayon de convergence = 1
 $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, f(x) = \frac{1}{1-x}$

Théorème de dérivation pour les séries entières

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2}$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X) = p \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1}p \quad (\text{formule de transfert})$$

$$= p \cdot (1-p) \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

$$= p \cdot (1-p) \cdot f''(1-p)$$

$$= p(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\text{Donc } \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$e) X \sim \text{Poi}(\lambda), \lambda > 0$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) p_X(k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Exercice 5.2. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 fini. Montrer que $\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}((X-c)^2)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$, avec égalité si et seulement si $c = \mathbb{E}(X)$.

$$\text{Var}(X) = \min_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}((X-c)^2) \text{ atteint à } c = \mathbb{E}(X)$$

Preuve:

$$0 \leq \mathbb{E}((X-c)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2cX + c^2) \\ = \mathbb{E}(X^2) - 2c\mathbb{E}(X) + c^2 < +\infty$$

$$0 \leq \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 < +\infty \quad \text{par linéarité de l'espérance (par hypothèse)}$$

$$\mathbb{E}((X-c)^2) - \text{Var}(X) = c^2 - 2c\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\ = (c - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$$

Cette différence s'annule si et seulement si $c = \mathbb{E}(X)$. $\square$

TD10: Ex 5.3, Ex 5.5, Ex 5.6

♥ **Exercice 5.3.** (Partiel 2020) On lance deux dés réguliers et on note X_1 le résultat du premier dé et X_2 le résultat du deuxième dé : les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi, de densité discrète $p_{X_1}(i) = p_{X_2}(i) = \frac{1}{6}$ pour $i \in \{1, \dots, 6\}$. On pose $Y = X_1 + X_2$ la somme des deux dés et $Z = X_1 - X_2$ la différence entre le premier et le deuxième dé.

- Montrer que Y et Z ne sont pas indépendantes.
- Calculer $\text{Cov}(Y, Z)$.
- Donner la densité discrète de $|Z|$. Calculer $\mathbb{E}(|Z|)$.

$$a) \quad \{Y=12\} = \{X_1+X_2=12\} = \{X_1=6, X_2=6\} \\ = \{Y=12, Z=0\}$$

$$\mathbb{P}(Y=12, Z \neq 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(Y=12) = \mathbb{P}(X_1=6, X_2=6) = \mathbb{P}(X_1=6)\mathbb{P}(X_2=6) = \frac{1}{36} > 0$$

$$\mathbb{P}(Z \neq 0) \geq \mathbb{P}(Z=1) \geq \mathbb{P}(X_1=2, X_2=1) = \frac{1}{36} > 0$$

$$\mathbb{P}(Y=12, Z \neq 0) \neq \mathbb{P}(Y=12)\mathbb{P}(Z \neq 0)$$

Donc Y et Z ne sont pas indép

b) $\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Propriété de covariance

La covariance $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ est une forme **symétrique et bilinéaire** :

Si X, Y, Z admettent un moment d'ordre 2 fini,

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$\text{Cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \text{Cov}(X, Z) + \beta \text{Cov}(Y, Z)$$

X_1 et X_2 sont bornées $|X_1| \leq 6, |X_2| \leq 6$

X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre 2 fini

$$Y = X_1 + X_2, \quad Z = X_1 - X_2$$

Y et Z ont aussi un moment d'ordre 2 fini

$$\text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{bilinéarité}} = \text{Cov}(X_1, X_1 - X_2) + \text{Cov}(X_2, X_1 - X_2) \\ & \xrightarrow{\text{bilinéarité}} = \text{Cov}(X_1, X_1) - \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_2, X_1) - \text{Cov}(X_2, X_2) \\ & = \text{Var}(X_1) - \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_1, X_2) - \text{Var}(X_2) \\ & = 0 \end{aligned}$$

car $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2)$

(X_1 et X_2 ont la même loi)

ces termes sont bien finis

Remarque:

Corollaire 3.47

Si $X \perp Y$ admettant une espérance finie, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$



$\text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow$ indép entre X et Y

$$c) \quad |Z| \text{ à valeurs dans } \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, 6\}\} = \{1, \dots, 6\}^2$$

$$|\Omega| = 36$$

$$\{|Z|=0\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$\mathbb{P}(|Z|=0) = p_{|Z|}(0) = \frac{|\{|Z|=0\}|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\{|Z|=1\} = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5)\}$$

$$\mathbb{P}(|Z|=1) = p_{|Z|}(1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$\{|Z|=2\} = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\}$$

$$\mathbb{P}(|Z|=2) = p_{|Z|}(2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\{|Z|=3\} = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (5,2), (6,3)\}$$

$$\mathbb{P}(|Z|=3) = p_{|Z|}(3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\{|Z|=4\} = \{(1,5), (2,6), (5,1), (6,2)\}$$

$$\mathbb{P}(|Z|=4) = p_{|Z|}(4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\{|Z|=5\} = \{(1,6), (6,1)\}$$

$$\mathbb{P}(|Z|=5) = p_{|Z|}(5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

(à vérifier que $\sum_{i=0}^5 p_{|Z|}(i) = 1$)

$$\mathbb{E}(|Z|) = \sum_{i=0}^5 i \cdot p_{|Z|}(i) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{4}{18} + 3 \cdot \frac{3}{18} + 4 \cdot \frac{2}{18} + 5 \cdot \frac{1}{18}$$

$$= \frac{35}{18}$$

Exercice 5.5. Montrer que, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$.

Remarque • $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$

- Si X à valeurs dans $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X| > n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X| \geq n)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \geq n+1} \mathbb{P}(X=i) \right) \\ &= \sum_{(n,i): n \geq 0, i \geq n+1} \mathbb{P}(X=i) \\ &= \sum_{(n,i): i \geq 1, 0 \leq n \leq i-1} \mathbb{P}(X=i) \\ &= \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{n=0}^{i-1} \mathbb{P}(X=i) \right) \\ &= \sum_{i \geq 1} i \cdot \mathbb{P}(X=i) \quad \text{ne dépend pas de } n \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} i \mathbb{P}(X=i) = \mathbb{E}(X) \quad \square \end{aligned}$$

≥ 1

♥ **Exercice 5.6.** Considérons une famille d'urnes indexées par les entiers naturels : la k -ème urne, avec $k \in \mathbb{N}^*$, contient 1 boule noire et k boules jaunes. Un joueur tire successivement (au hasard, uniformément, et de manière indépendante) une boule dans l'urne n° 1, puis une boule dans l'urne n° 2, puis une boule dans l'urne n° 3, etc... On pose T le numéro de l'urne où le joueur tire une boule noire pour la première fois.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{n+1}$. En déduire que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.
- Calculer la densité discrète de T . Que vaut $\mathbb{E}(T)$?

a) $\forall k \geq 1, A_k = \text{"la boule tirée de la } k\text{-ème urne soit jaune"}$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{k}{k+1}$$

$$\{T > n\} = A_1 \cap \dots \cap A_n \text{ par définition de } T$$

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$= \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n) \text{ par l'indép des } A_1, \dots, A_n$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\{T = +\infty\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{n \geq 1} \{T > n\}$$

$\{T > n\}, n \geq 1$ est une suite décroissante d'événement

$$\text{Donc } \mathbb{P}(T = +\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \{T > n\}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T > n) \text{ par continuité de } \mathbb{P}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

(c-à-d. T est presque sûrement fini)

$$b) \forall n \geq 1, \{T = n\} = \{T > n-1\} \setminus \{T > n\}$$

$$\mathbb{P}_T(n) = \mathbb{P}(T = n)$$

$$= \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}} n \mathbb{P}_T(n)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \mathbb{P}_T(n)$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} = +\infty$$

A priori, T est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, mais

$$\mathbb{P}_T(+\infty) = \mathbb{P}(T = +\infty) = 0$$

TD 11: Ex 5.7, 5.8 et 5.10

Exercice 5.7. (Examen 2020) On lance une fléchette sur une cible. On obtient 5 points si on touche le centre (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{6}$), 2 points si on touche la zone intermédiaire (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{3}$), et 1 point si on touche la zone périphérique (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{2}$). On note X le score obtenu lors du lancer d'une fléchette.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

On lance maintenant successivement plusieurs fléchettes : on note X_i le score obtenu lors du i -ème lancer, et on suppose que les $(X_i)_{i \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On pose $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ le score obtenu après n lancers de fléchettes.

b) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\text{Var}(S_n)$.

Pour la v.a. X ,	les valeurs possibles	5	2	1
	densité discrète	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

a) Question facile

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x p_X(x) = 5 \cdot p_X(5) + 2 \cdot p_X(2) + 1 \cdot p_X(1) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

Lorsque la loi de X est connue, très souvent on calcule la variance par la formule $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 p_X(x) \quad (\text{formule de transfert})$$

$$= 5^2 \cdot p_X(5) + 2^2 \cdot p_X(2) + 1^2 \cdot p_X(1)$$

$$= \frac{25}{6} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = 6$$

$$\text{Donc } \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 6 - 4 = 2$$

b) Par linéarité de l'espérance (les v.a. X_i sont d'espérance finie)

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n 2 = 2n$$

$\uparrow$
question a)

Les v.a. X_i sont **indép.** et admettent un moment d'ordre 2 fini

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n 2 = 2n$$

↑
question a)

c) Soit $N \geq 1$. En utilisant **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, montrer que pour tout $1 \leq j < N/2$ on a

$$\mathbb{P}(S_j \geq N) \leq \frac{2j}{(N-2j)^2}.$$

En déduire que l'on a moins d'une chance sur 10 d'obtenir un score supérieur à 200 en lançant moins de 80 fléchettes.

Comme $\mathbb{E}(S_j) = 2j$ d'après b),

$$\{S_j \geq N\} = \{S_j - \mathbb{E}(S_j) \geq N - 2j\}$$

une v.a. d'espérance nulle, dite "centrée"

$$1 \leq j < \frac{N}{2} \text{ implique que } \{S_j - \mathbb{E}(S_j) \geq N - 2j\} \subset \{|S_j - \mathbb{E}(S_j)| \geq N - 2j\}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(S_j \geq N) \leq \mathbb{P}(|S_j - \mathbb{E}(S_j)| \geq N - 2j) \stackrel{>0}{\leq} \frac{\text{Var}(S_j)}{(N - 2j)^2}$$

↑
par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Comme $\text{Var}(S_j) = 2j$ d'après b), on obtient l'inégalité recherchée

$$\mathbb{P}(S_j \geq N) \leq \frac{2j}{(N-j)^2}$$

"obtenir un score ≥ 200 en lançant moins de 80 fléchettes"

$$= \{\exists j \leq 80 \text{ tel que } S_j \geq 200\}$$

Les X_i sont ≥ 1 , $(S_j)_{j \geq 1}$ est une suite strictement croissante

$$\text{Donc } \{\exists j \leq 80 \text{ tel que } S_j \geq 200\} \subset \{S_{80} \geq 200\}$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer l'inégalité obtenue à $j=80$, $N=200$

$$\mathbb{P}(S_{80} \geq 200) \leq \frac{160}{40^2} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(\exists j \leq 80 \text{ tel que } S_j \geq 200) \leq \frac{1}{10}$$

♥ **Exercice 5.8.** Soit X une variable aléatoire de loi $\text{Bin}(n, 1/2)$.

a) Montrer que X et $n - X$ ont la même loi. En déduire que pour tout $k > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(X - \frac{n}{2} \geq k\right) = \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(\left|X - \frac{n}{2}\right| \geq k\right).$$

b) Montrer que pour tout $k > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(X_n - \frac{n}{2} \geq k\right) \leq \frac{n}{8k^2}.$$

c) En France, il y a eu 700 000 naissances en 2019, dont 355 000 garçons et 345 000 filles. Vous semble-t-il raisonnable de soutenir l'idée qu'un nouveau-né ait autant de chance d'être un garçon qu'une fille ?

a) Calcul direct:

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \mathbb{P}(X=j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-j} = \binom{n}{j} 2^{-n}$$

$$\text{et } \mathbb{P}(n-X=j) = \mathbb{P}(X=n-j) = \binom{n}{n-j} 2^{-n}$$

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \binom{n}{n-j} \Rightarrow \mathbb{P}(X=j) = \mathbb{P}(n-X=j)$$

Donc X et $n-X$ ont la même loi.

Remarque : une autre approche

Suppose qu'il existe $Y_1, \dots, Y_n$ indép de loi $\text{Bern}(\frac{1}{2})$

tel que $X = Y_1 + \dots + Y_n$.

En notant $\tilde{Y}_i = 1 - Y_i$, $1 \leq i \leq n$, on a

$$n - X = (1 - Y_1) + \dots + (1 - Y_n) = \tilde{Y}_1 + \dots + \tilde{Y}_n$$

Les $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ sont aussi indép, toutes de loi $\text{Bern}(\frac{1}{2})$

Donc $n-X$ suit également la loi $\text{Bin}(n, \frac{1}{2})$

$$\forall k > 0, \{ |X - \frac{n}{2}| \geq k \} = \{ X - \frac{n}{2} \geq k \} \sqcup \{ X - \frac{n}{2} \leq -k \}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| \geq k) = \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k) + \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \leq -k)$$

union disjointe

$$\text{Or, } \{ X - \frac{n}{2} \leq -k \} = \{ \frac{n}{2} - X \geq k \} = \{ n - X - \frac{n}{2} \geq k \}$$

Comme X et $n - X$ ont même loi,

$$\mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \leq -k) = \mathbb{P}(n - X - \frac{n}{2} \geq k) = \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k)$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| \geq k) = \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k) + \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \leq -k) \\ = 2 \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k)$$

$$\text{b) } X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2}), \quad \mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \\ \text{Var}(X) = n \cdot \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{n}{4}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| \geq k) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k) \leq \frac{\text{Var}(X)}{k^2} = \frac{n}{4k^2}$$

Donc d'après a),

$$\mathbb{P}(X_n - \frac{n}{2} \geq k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| \geq k) \leq \frac{n}{8k^2}$$

c)  La proportion de garçons $\frac{355}{700} \approx 0,507$ très proche de $\frac{1}{2}$ ne signifie pas que l'idée est "bonne".

Hypothèse: une naissance ait autant de chance d'être un garçon ou une fille, et cela de manière indépendante

Estimons sous cette hypothèse

$$\mathbb{P}(\text{il y a } 355000 \text{ garçons et } 345000 \text{ filles parmi } 700000 \text{ naissances})$$

Écrivons $n = 700000$, $X_n =$ nombre de garçons nés
D'après l'hypothèse, X_n suit la loi Bin $(n, \frac{1}{2})$
Alors, $\mathbb{P}(X_n = 355000) \leq \mathbb{P}(X_n \geq 355000)$

$$= \mathbb{P}\left(X_n - \frac{n}{2} \geq 5000\right)$$

$$\leq \frac{n}{8 \cdot (5000)^2} \quad \text{d'après b)}$$

$$= \frac{700000}{8 \cdot (5000)^2} = \frac{7}{2} \cdot 10^{-3} \quad \text{très petite !}$$

En conclusion, si les naissances avaient autant de chances d'être une fille qu'un garçon, il y aurait une probabilité $\leq 0,0035$ d'avoir 355000 garçons parmi 700000 naissances.

Cela rend l'hypothèse très peu vraisemblable.

Exercice 5.10. $2n$ personnes, n hommes et n femmes, sont réparties de manière aléatoire dans deux groupes de n personnes chacun.

a) Combien y a-t-il de manière de répartir $2n$ personnes en deux groupes de n personnes ?

On appelle X le nombre de femmes dans le premier groupe.

b) Donner la loi de X .

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$. (Écrire $X = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ où $A_i =$ "la i^{e} femme est dans le premier groupe".)

d) Montrer que pour $i \neq j$, $\text{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) \leq 0$. En déduire que $\text{Var}(X) \leq \frac{n}{4}$.

e) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| > \epsilon n) \leq \frac{1}{4\epsilon^2 n}$.

a) Répartir $2n$ personnes en deux groupes de n personnes
= choisir n personnes parmi $2n$ pour constituer le 1^{er} groupe
(les n personnes restant constituent automatiquement le 2nd groupe)
Il y a $\binom{2n}{n}$ façons de le faire.

b) X = nb. de femmes dans le 1^{er} groupe
 les valeurs possibles sont $\{0, 1, \dots, n\}$

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{N_k}{\binom{2n}{n}}$$

où N_k := nb. de manières de former le 1^{er} groupe avec k femmes et $n-k$ hommes

$$= \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} \leftarrow \text{choisir } n-k \text{ hommes parmi } n$$

↑
 choisir k femmes parmi n

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n$$

c) $X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$ où A_i = "la i^{e} femme est dans le 1^{er} groupe"

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \mathbb{P}(A_i) = \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \leftarrow \text{choisir } n-1 \text{ autre personnes pour 1^{er} groupe}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{(n-1)! n!} \cdot \frac{n! n!}{(2n)!} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(1_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = \frac{n}{2}$$

$$d) \quad i \neq j, \quad \text{Cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}) = \mathbb{E}(1_{A_i} 1_{A_j}) - \mathbb{E}(1_{A_i}) \mathbb{E}(1_{A_j})$$

$$= \mathbb{E}(1_{A_i \cap A_j}) - \mathbb{E}(1_{A_i}) \mathbb{E}(1_{A_j})$$

$$= \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j)$$

$$= \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\text{Donc } \text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n 1_{A_i}\right)$$

! Les A_i ne sont pas indép
 $\text{Var}(\sum 1_{A_i}) \neq \sum \text{Var}(1_{A_i})$

$$= \sum_{i=1}^n \text{Var}(1_{A_i}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(1_{A_i}, 1_{A_j})$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)(1 - \mathbb{P}(A_i)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} = \frac{n}{4}$$

$$e) \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|X - \frac{n}{2}\right| > \varepsilon n\right) = \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon n\right)$$

$$\leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$$

↑
 Bienaymé-Tchebychev

TD 12: Révision avant le partiel

(Les corrections détaillées du partiel 2020 sont sur Moodle.)

Exercice 2.

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètres respectifs $p_1, p_2, p_3 \in]0, 1[$. On pose $Y = X_1 X_2$ et $Z = X_2 X_3$.

- 1) Donner la loi de Y et la loi de Z .
- 2) Donner la densité discrète jointe de (Y, Z) .
- 3) Calculer la covariance $\text{Cov}(Y, Z)$.
- 4) Est-ce que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes?

$$1) \quad Y(\Omega) = Z(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$\mathbb{P}_Y(1) = \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) \stackrel{\text{ indép }}{=} p_1 p_2$$

$$\Rightarrow Y \sim \text{Bern}(p_1 p_2)$$

$$\text{De même } Z \sim \text{Bern}(p_2 p_3)$$

$$2) \quad (Y, Z)(\Omega) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$p_{Y,Z}(1,1) = \mathbb{P}(Y=1, Z=1) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1, X_3=1) \\ \stackrel{\text{indép}}{=} p_1 p_2 p_3$$

$$p_{Y,Z}(1,0) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1, X_3=0) \\ \stackrel{\text{indép}}{=} p_1 p_2 (1-p_3)$$

$$p_{Y,Z}(0,1) = (1-p_1) p_2 p_3$$

$$p_{Y,Z}(0,0) = 1 - p_{Y,Z}(1,1) - p_{Y,Z}(1,0) - p_{Y,Z}(0,1) \\ = 1 - p_1 p_2 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) \quad YZ(\Omega) = \{0,1\} \\ \mathbb{P}(YZ=1) = p_1 p_2 p_3 \end{array} \right\} \Rightarrow YZ \sim \text{Bern}(p_1 p_2 p_3)$$

$$\mathbb{E}(YZ) = p_1 p_2 p_3$$

$$Y \sim \text{Bern}(p_1 p_2) \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = p_1 p_2$$

$$Z \sim \text{Bern}(p_2 p_3) \Rightarrow \mathbb{E}(Z) = p_2 p_3$$

$$\text{Cov}(Y, Z) = \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y) \mathbb{E}(Z)$$

$$= p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2^{\text{red}} p_3 = p_1 p_2 p_3 (1 - p_2)$$

$$4) \quad \text{Cov}(Y, Z) > 0 \quad \text{car } p_1, p_2, p_3 \in]0, 1[$$

$\Rightarrow Y, Z$ ne sont pas indép.

Exercice 3.

Considérons une famille d'urnes indexée par les entiers naturels : pour tout $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, la k -ème urne contient 1 boule noire et k boules blanches. On choisit un nombre au hasard X , de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et tire une boule au hasard dans l'urne numéro X . On note A l'événement "la boule choisie est noire". On rappelle que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1) Trouver la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A | X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire que $\mathbb{P}(A) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$.
- 3) Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = k | A)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 4) Montrer que $\mathbb{P}(X = k | A) = \mathbb{P}(X - 1 = k | X \geq 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$1) \mathbb{P}(A | X = k) = \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} 2) \mathbb{P}(A) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(A \cap \{X = k\}) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(A | X = k) \mathbb{P}(X = k) \quad (\text{formule de proba totales}) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \right) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \mathbb{P}(X = k | A) &= \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A | X = k) \mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(A)} \quad (\text{formule de Bayes}) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

$$4) \mathbb{P}(X-1=k \mid X \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(X = \overbrace{k+1}^{\geq 1})}{\mathbb{P}(X \geq 1)}$$

$$\mathbb{P}(X=k+1) = \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda}, \quad \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - e^{-\lambda}$$

Exercice 4.

Considérons une expérience aléatoire qui consiste en une série de tirages indépendants, donnant un succès avec probabilité $p \in]0, 1[$ (constante durant toute l'expérience) et un échec avec une probabilité $1 - p$. Soit $r \geq 1$ un entier.

- 1) Soit X le nombre de tirages nécessaire pour obtenir r succès. Montrer que pour tout entier $n \geq r$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

On dira que X suit une loi binomiale négative de paramètres r et p .

- 2) Soit $m \geq 1$ un entier. Exprimer sous la forme d'une somme la probabilité que le r -ème succès ait lieu avant le m -ème échec.
 3) Pour tout entier $k \geq 1$, montrer que

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{r}{p} \mathbb{E}[(Y-1)^{k-1}],$$

où Y suit une loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p .

- 4) En déduire que $\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p}$ et $\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

- 1) X à valeurs dans $\{r, r+1, \dots\}$

$\forall n \geq r, \quad X = n \Leftrightarrow$ on a un succès au n^{e} tirage
 et pendant les $n-1$ premiers tirages,
 on a exactement $r-1$ succès

$$\mathbb{P}(X=n) \stackrel{\text{indép}}{=} p \cdot \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(n-1)-(r-1)}$$

$\uparrow$ binomiale

2) "r^e succès arrive avant m^e échec"

$$= \{r \leq X \leq r+m-1\}$$

$X=r \Leftrightarrow$ r^e succès arrive lorsqu'on a 0 échec

$X=r+m-1 \Leftrightarrow$ r^e succès arrive lorsqu'on a m-1 échecs

$\mathbb{P}(\text{r}^{\text{e}} \text{ succès arrive avant m}^{\text{e}} \text{ échec})$

$$= \sum_{n=r}^{r+m-1} \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=r}^{r+m-1} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

3) $\mathbb{E}(X^k) \stackrel{(1)}{=} \sum_{n \geq r} n^k \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$

$$= \frac{r}{p} \sum_{n \geq r} n^k \frac{1}{r} \binom{n-1}{r-1} p^{r+1} (1-p)^{n-r}$$

$n \binom{n-1}{r-1} = r \binom{n}{r} \rightarrow$

$$= \frac{r}{p} \sum_{n \geq r} n^{k-1} \binom{n}{r} p^{r+1} (1-p)^{n-r}$$

pose $m=n+1 \rightarrow$

$$= \frac{r}{p} \sum_{m=r+1}^{\infty} (m-1)^{k-1} \binom{m-1}{r} p^{r+1} (1-p)^{m-(r+1)}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{r}{p} \mathbb{E}((Y-1)^{k-1})$$

4) En prenant $k=1$, $\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p} \mathbb{E}((Y-1)^0) = \frac{r}{p} \quad (*)$

En prenant $k=2$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{r}{p} \mathbb{E}((Y-1)) = \frac{r}{p} (\mathbb{E}(Y)-1)$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{r}{p} \left(\frac{r+1}{p} - 1 \right)$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

TD 13: Ex 6.1, 6.2, 6.5

♥ **Exercice 6.1.** Calculer la fonction génératrice G_X de X , lorsque X est une variable aléatoire de loi : a) Bern(p); b) Bin(n, p); c) Géom(p); d) Poi(λ).

Dans tous les cas, donner le rayon de convergence de G_X .

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) s^n, \quad s \in [-1, 1]$$

a) Bern(p) : $G_X(s) = \mathbb{P}(X=1)s^1 + \mathbb{P}(X=0)s^0$
 $= p \cdot s + (1-p) \cdot 1 = 1-p+ps, \quad \forall s \in \mathbb{R}$

le rayon de convergence $R = +\infty$

b) Bin(n, p) : $G_X(s) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k) s^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k$
 $= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k}$
 $= (ps + 1-p)^n, \quad \forall s \in \mathbb{R}$

le rayon de convergence $R = +\infty$

2^e méthode: On écrit $X = X_1 + \dots + X_n$
 où les X_i sont v.a. indép de loi Bern(p)

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \mathbb{E}(s^{X_1 + \dots + X_n})$$

$$= \mathbb{E}(s^{X_1}) \dots \mathbb{E}(s^{X_n}) \quad \text{par indép.}$$

$$= (1-p+ps)^n, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{par (a)}$$

c) Géom(p) : $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) s^n$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} s^n$
 $= ps \cdot \sum_{n=1}^{\infty} ((1-p)s)^{n-1} = ps \cdot \frac{1}{1-(1-p)s}$
 pour tout $s \in]\frac{-1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$. ($R = \frac{1}{1-p}$)

$$\begin{aligned}
 \text{d) Poi}(\lambda): G_X(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) s^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} s^n \\
 &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^n}{n!} \\
 &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \quad \forall s \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Le rayon de convergence $R = +\infty$.

Exercice 6.2. À partir de la fonction génératrice de X , calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X-1))$ puis $\text{Var}(X)$, lorsque X est une variable aléatoire de loi : a) Géom(p); b) Poi(λ).

Rappel: $\mathbb{E}(X) = G'_X(1^-) = G'_X(1)$ (si cette dérivée existe)

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1^-) = G''_X(1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\
 &= G''_X(1^-) + G'_X(1^-) - G'_X(1^-)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{a) Géom}(p): G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}, \quad \forall |s| < \frac{1}{1-p}$$

$$p > 0, \text{ le rayon de convergence } R = \frac{1}{1-p} > 1$$

$$G'_X(s) = \frac{p(1-(1-p)s) - ps(-(1-p))}{(1-(1-p)s)^2} = \frac{p}{(1-(1-p)s)^2}$$

$$G''_X(s) = \frac{-2p}{(1-(1-p)s)^3} \cdot (-(1-p)) = \frac{2(1-p)p}{(1-(1-p)s)^3}$$

$$\begin{aligned}
 G'_X(1) &= \frac{1}{p}, & G''_X(1) &= \frac{2(1-p)p}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2} \\
 \mathbb{E}(X) & & \mathbb{E}(X(X-1)) &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 \\ &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

b) $\text{Poi}(\lambda)$: $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$, $\forall s \in \mathbb{R}$

$$G_X'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)} \quad G_X''(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$$

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \lambda, \quad \mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1) = \lambda^2$$

$$\text{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

♥ **Exercice 6.5.** Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, suivant une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . Calculer la fonction génératrice de $X + Y$. Qu'en déduisez-vous ?

$$G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y})$$

$$= \mathbb{E}(s^X s^Y)$$

$$= \mathbb{E}(s^X) \mathbb{E}(s^Y) \quad \text{par indép}$$

$$= G_X(s) G_Y(s)$$

$$= e^{\lambda_1(s-1)} e^{\lambda_2(s-1)} \quad \begin{array}{l} X \sim \text{Poi}(\lambda_1) \\ Y \sim \text{Poi}(\lambda_2) \end{array}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(s-1)}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson $(\lambda_1 + \lambda_2)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, on obtient que $X + Y \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

♡ **Exercice 6.6.** Soit $n \geq 1$ et $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$; on pose $Y_n = X_1 + \dots + X_n$. (Un contexte possible est le suivant : $X_i = 1$ représente le fait que le i^{e} assuré subisse un sinistre; le nombre total d'assurés subissant un sinistre est Y_n ; le fait que p_n soit petit modélise le fait que le risque de sinistre pour chaque assuré est petit devant le nombre d'assurés.)

a) Calculer la fonction génératrice de Y_n .

b) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la fonction génératrice de Y_n (on pourra utiliser que $\ln(1+u) = u + o(u)$ quand $u \downarrow 0$). Cela vous rappelle-t-il un résultat du cours ?

$$a) \quad G_{X_i}(s) = 1 - p_n + p_n s, \quad 1 \leq i \leq n, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$G_{Y_n}(s) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(s) \quad \text{par indép.}$$

$$= (1 - p_n + p_n s)^n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(s-1)\right)^n, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$(Y_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n}))$$

$$b) \quad G_{Y_n}(s) = \exp\left(\ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}(s-1)\right)^n\right)$$

$$= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}(s-1)\right)\right)$$

$$= \exp\left(n \cdot \frac{\lambda}{n}(s-1) + o\left(n \cdot \frac{\lambda}{n}(s-1)\right)\right) \quad \begin{matrix} o(\lambda(s-1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ // \end{matrix} \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{Y_n}(s) = \exp(\lambda(s-1))$$

↖ fonction génératrice de loi $\text{Poi}(\lambda)$

Ceci rappelle le fait que

$$\mathbb{P}(Y_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

TD14: Ex 7.1, 7.2 et 7.4

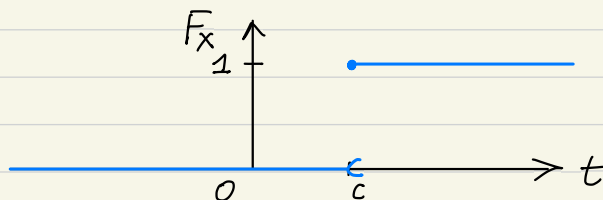
♥ **Exercice 7.1.** Dessiner le graphe de la fonction de répartition F_X de X , lorsque X est une variable aléatoire de loi : a) constante égale à $c \in \mathbb{R}$; b) $\text{Bern}(p)$; c) $\text{Géom}(p)$.

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$F_X(t) - F_X(t-) = \mathbb{P}(X = t)$$

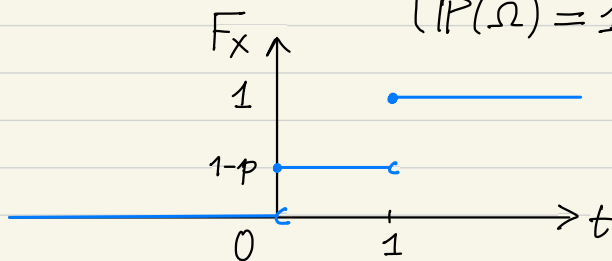
a) $X = c \in \mathbb{R}$ constante

$$F_X(t) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & \text{si } t < c \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1 & \text{si } t \geq c \end{cases}$$



b) $X \sim \text{Bern}(p)$

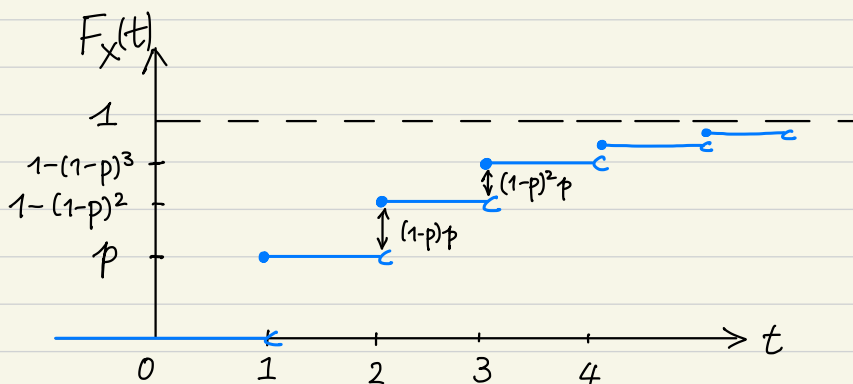
$$F_X(t) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$



c) $X \sim \text{Géom}(p)$

$$F_X(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k) \\ = 1 - (1-p)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p, \quad \forall k \geq 1$$



La hauteur du saut en k est $(1-p)^{k-1}p$.

♡ **Exercice 7.2.** Déterminer si les fonctions $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ suivantes sont des fonctions de répartition d'une variable aléatoire ?

a) $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F_X(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ si $x \in [0, 1]$, $F_X(x) = 1$ si $x > 1$;

b) $F(x) = \frac{|x|}{1+2|x|}$ si $x \geq 0$, $F(x) = 0$ si $x < 0$;

c) $F(x) = \exp(-e^{-x})$.

Rappel : Si $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ vérifie les 4 propriétés suivantes :

(i) F est croissante

(ii) F est continue à droite

(iii) " $F(-\infty)$ " = $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$

(iv) " $F(+\infty)$ " = $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$

alors F est la fonction de répartition d'une v.a. réelle.

Solution (a) F croissante

F continue à droite (0 est le seul pt de discontinuité)

" $F(+\infty)$ " = 1 " $F(-\infty)$ " = 0

F est bien la fonction de répartition d'une v.a.

(b) $x \mapsto \frac{|x|}{1+2|x|}$ est croissante $\Rightarrow F$ croissante

$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ continue à droite $\Rightarrow F$ continue à droite

(Les pts de discontinuité de F sont $\mathbb{N}^*$)

$$"F(-\infty)" = 0 \quad "F(+\infty)" = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{1+2\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{2} \neq 1$$

F n'est pas une fonction de répartition

$$(c) \quad F(x) = G \circ G(x) \quad \text{où} \quad G(x) = e^{-x}$$

F croissante (G décroissante)

F continue (G continue)

$$"F(+\infty)" = 1 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \quad G(0) = 1$$

$$"F(-\infty)" = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

F est bien une fonction de répartition

Exercice 7.4. Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{\lfloor x \rfloor}{1+\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

a) Vérifier qu'il s'agit bien de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

b) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X < 1)$, et $\mathbb{P}(X \in [a, 1])$ pour $a \in [0, 1]$.

c) Calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. A-t-on $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) = 1$? Pouvez-vous répondre sans calcul?

$$a) \quad x \geq 0 \mapsto \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) \quad \text{et} \quad x \geq 0 \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{1+\lfloor x \rfloor} \quad \text{sont croissantes}$$

F_X est croissante sur chaque intervalle

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1[$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \frac{\lfloor x \rfloor}{1+\lfloor x \rfloor} \geq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, 1[, \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$$

Donc F_X est croissante sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$ est continue

$x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{1 + \lfloor x \rfloor}$ est continue à droite ($x \mapsto \lfloor x \rfloor$ continue à droite)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(x) = F_X(0) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} F_X(x) = F_X(1)$$

(F_X est continue en 0)

$$\text{Pour tout } k \geq 1, F_X(k) = \frac{k}{1+k}$$

$$\forall \varepsilon \in [0, 1[, F_X(k+\varepsilon) = \frac{\lfloor k+\varepsilon \rfloor}{1 + \lfloor k+\varepsilon \rfloor} = \frac{k}{1+k} = F_X(k)$$

$$k \geq 2, F_X(k-\varepsilon) = \frac{\lfloor k-\varepsilon \rfloor}{1 + \lfloor k-\varepsilon \rfloor} = \frac{k-1}{1+k-1} = \frac{k-1}{k} \neq F_X(k)$$

Donc F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{1 + \lfloor x \rfloor} = 1$$

Conclusion: F_X est bien une fonction de répartition.

TD15: Ex 7.4 (bis), 7,5 et 7,6

Ex 7.4 b) $\mathbb{P}(X=0) = F_X(0) - F_X(0^-)$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-0}) - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\mathbb{P}(X < 1) = F_X(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

$$\begin{aligned} \forall a \in [0, 1] \quad \mathbb{P}(X \in [a, 1]) &= \mathbb{P}(X \leq 1) - \mathbb{P}(X < a) = F_X(1) - F_X(a^-) \\ &= \frac{1}{1+1} - \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - e^{-a}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-a} \end{aligned}$$

$$c) \mathbb{P}(X=0)=0, \mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X \in [1,1]) = \frac{1}{2}e^{-1} \text{ déjà vu dans b)}$$

$$\forall k \geq 2, \mathbb{P}(X=k) = F_X(k) - F_X(k^-) \\ = \frac{k}{1+k} - \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k) = 0 + \frac{1}{2}e^{-1} + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k+1)} = 0 + \frac{1}{2}e^{-1} + \sum_{k \geq 2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ = 0 + \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+e^{-1}) < 1 \text{ car } e^{-1} < 1$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k) < 1 \text{ car } \mathbb{P}(X \in]0,1[) = F_X(1^-) - F_X(0) = \frac{1}{2}(1-e^{-1}) > 0 \\ \mathbb{P}(X \in]0,1[) > 0 \text{ puisque } F_X \text{ est strictement croissante sur }]0,1[.$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k) + \mathbb{P}(X \in]0,1[) \leq \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

♥ Exercice 7.5. Soit X une variable aléatoire réelle indépendante d'elle-même.

a) Montrer que l'on a nécessairement $F_X(x)(1 - F_X(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F_X = \mathbf{1}_{[c, +\infty[}$. Qu'en conclure sur la variable aléatoire X ?

$$a) F_X(x)(1 - F_X(x)) = 0 \Leftrightarrow F_X(x) = F_X(x)^2 \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(X \leq x)$$

Comme X est indép de X , $\forall x \in \mathbb{R}$, l'événement $\{X \leq x\}$ est indép de lui même.

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{X \leq x\}) \\ = \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(X \leq x) \text{ par indép}$$

Ceci implique que $F_X(x)(1 - F_X(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Par a), on sait que $F_X(x) \in \{0, 1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Comme F_X est croissante, $\exists c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ t.q. $F_X(x) = 0$ si $x < c$

Or, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$, $F_X(x) = 1$ si $x > c$

On a $c \in \mathbb{R}$ (car si $c = +\infty$, $F_X = 0$ contredit $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
si $c = -\infty$, $F_X = 1$ contredit $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$)

Par la continuité à droite de F_X , on a $F_X(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} F_X(x) = 1$

Donc $F_X(x) = 0$ si $x < c$

$F_X(x) = 1$ si $x \geq c$ c'est-à-dire $F_X = 1_{[c, +\infty[}$

$$\mathbb{P}(X=c) = F_X(c) - F_X(c^-) = 1 - \lim_{x \rightarrow c^-} 0 = 1 - 0 = 1$$

Ainsi $X=c$ presque sûrement

(X est une v.a. réelle constante presque sûrement.)

Exercice 7.6. Soit X une v.a. réelle, de fonction de répartition F_X . Exprimer, en fonction de F_X , les fonctions de répartition des variables aléatoires suivantes : a) $2X+1$; b) $-X$; c) e^X ; d) X^2 ; e) $\lfloor X \rfloor$.

$$a) F_{2X+1}(t) = \mathbb{P}(2X+1 \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{t-1}{2}\right), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\{2X+1 \leq t\} = \{X \leq \frac{t-1}{2}\}$$

$$b) F_{-X}(t) = \mathbb{P}(-X \leq t) = \mathbb{P}(X \geq -t) = 1 - \mathbb{P}(X < -t) \\ = 1 - F_X((-t)^-), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$c) \forall t \leq 0, F_{e^X}(t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = 0$$

$$\forall t > 0, F_{e^X}(t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \ln t) = F_X(\ln t)$$

$$d) \forall t < 0, F_{X^2}(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = 0$$

$$\forall t \geq 0, F_{X^2}(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) \\ = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) - \mathbb{P}(X < -\sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X((- \sqrt{t})^-)$$

$$e) \forall t \in \mathbb{R}, F_{\lfloor X \rfloor}(t) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \leq t) = \mathbb{P}(X < \lfloor t \rfloor + 1) \\ = F_X((\lfloor t \rfloor + 1)^-)$$

Remarque: $\lfloor t \rfloor + 1 > t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

TD 16: Ex 7.7, 7.10 et 7.11

♥ **Exercice 7.7.** Soient X et Y deux v.a. réelles **indépendantes**. Exprimer les fonctions de répartitions de $W = \max(X, Y)$ et de $Z = \min(X, Y)$ en fonctions de celles de X et Y .

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \{W \leq t\} &= \{\max(x, y) \leq t\} = \{X \leq t, Y \leq t\} \\ &= \{X \leq t\} \cap \{Y \leq t\} = \{X \leq t \text{ et } Y \leq t\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_W(t) &= \mathbb{P}(W \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t \text{ et } Y \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X \leq t) \mathbb{P}(Y \leq t) \quad \text{par l'indép. entre } X \text{ et } Y\end{aligned}$$

$$= F_X(t) F_Y(t)$$

$$\begin{aligned}\{Z \leq t\} &= \{\min(X, Y) \leq t\} = \{X \leq t \text{ ou } Y \leq t\} \\ &= \{X \leq t\} \cup \{Y \leq t\}\end{aligned}$$

Il vaut mieux passer au complémentaire ("U" $\rightarrow$ "∩")
union intersection

$$\{Z > t\} = \{\min(X, Y) > t\} = \{X > t \text{ et } Y > t\}$$

$$\begin{aligned}F_Z(t) &= 1 - \mathbb{P}(Z > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t \text{ et } Y > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > t) \mathbb{P}(Y > t) \quad \text{par l'indép. entre } X \text{ et } Y \\ &= 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)) = F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t) F_Y(t)\end{aligned}$$

$$F_{\max(X, Y)} = F_X \cdot F_Y$$

sous l'hypothèse $X \perp Y$

$$F_{\min(X, Y)} = 1 - (1 - F_X)(1 - F_Y) = F_X + F_Y - F_X \cdot F_Y$$

2nd méthode :

$$\begin{aligned}F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t \text{ ou } Y \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X \leq t) + \mathbb{P}(Y \leq t) - \mathbb{P}(X \leq t \text{ et } Y \leq t) \\ &= F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t) F_Y(t)\end{aligned}$$

Rappel: X v.a. réelle

$\forall t \in \mathbb{R}$,

Fonction génératrice des moments $M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) \in [0, +\infty]$

Exercice 7.10. Calculer la fonction génératrice des moments M_X de X , lorsque X est une variable aléatoire de loi : a) $\text{Bin}(n, p)$; b) $\text{Geom}(p)$; c) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{c_\alpha} |k|^{-(1+\alpha)}$ pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, où $\alpha > 0$ est un paramètre donné (et $c_\alpha = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\alpha)}$).

a) $X \sim \text{Bin}(n, p)$

On écrit $X = X_1 + \dots + X_n$ où $X_i, 1 \leq i \leq n$ sont indép et de loi $\text{Bern}(p)$.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}(e^{t(X_1 + \dots + X_n)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX_1}) \dots \mathbb{E}(e^{tX_n}) \quad \text{par indép} \\ &= ((1-p)e^0 + pe^t)^n = (1-p+pe^t)^n \end{aligned}$$

b) $X \sim \text{Geom}(p)$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k \geq 1} e^{tk} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k \geq 1} e^{tk} (1-p)^{k-1} p \\ &= pe^t \cdot \sum_{k \geq 1} (e^t(1-p))^{k-1} = \frac{pe^t}{1 - e^t(1-p)} \end{aligned}$$

c) $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{tk} \mathbb{P}(X=k)$

$$= \frac{1}{c_\alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{tk} |k|^{-(1+\alpha)} \quad \text{où } \alpha > 0$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathbb{P}(X=k) = 1 \Rightarrow c_\alpha = 2 \sum_{n \geq 1} n^{-(1+\alpha)} < +\infty$$

$$M_X(0) = \mathbb{E}(e^{0 \cdot X}) = 1$$

$$\text{Si } t > 0, \quad M_X(t) \geq \frac{1}{c_\alpha} \sum_{k \geq 1} e^{tk} k^{-(1+\alpha)} = \frac{1}{c_\alpha} \sum_{k \geq 1} \underbrace{\left(\frac{e^t}{1} \right)^k}_{> 1} k^{-(1+\alpha)}$$

$$\Rightarrow M_X(t) = +\infty$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{tk} \cdot k^{-(1+\alpha)} = +\infty \right)$$

$= +\infty$
pour tout $\alpha > 0$

$$\text{Si } t < 0, M_X(t) \geq \frac{1}{c_\alpha} \sum_{k \leq -1} \overbrace{e^{(-k)(-t)}}^{= +\infty} (-k)^{-(1+\alpha)} \Rightarrow M_X(t) = +\infty$$

$$\text{Donc } M_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ +\infty & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

♥ **Exercice 7.11.** Soit X une v.a. réelle, et Y une v.a. de loi $\mathbb{P}(Y = +1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$, indépendante de X . Exprimer la fonction génératrice des moments de $Z := YX$ en fonction de celle de X .

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ}) = \mathbb{E}(e^{tYX}) = \mathbb{E}(e^{tYX}(1_{\{Y=1\}} + 1_{\{Y=-1\}})) \\ &= \mathbb{E}(e^{tYX} 1_{\{Y=1\}}) + \mathbb{E}(e^{tYX} 1_{\{Y=-1\}}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{Y=1\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX} 1_{\{Y=-1\}}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX}) \mathbb{E}(1_{\{Y=1\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX}) \mathbb{E}(1_{\{Y=-1\}}) \\ &\quad \uparrow e^{tX} \text{ est indép de } 1_{\{Y=1\}} \text{ et } e^{-tX} \text{ est indép de } 1_{\{Y=-1\}} \\ &= M_X(t) \mathbb{P}(Y=1) + M_X(-t) \mathbb{P}(Y=-1) \\ &= \frac{1}{2} (M_X(t) + M_X(-t)) \end{aligned}$$

TD17: Ex 8.1, 8.3 et 8.4

Exercice 8.1. Déterminer la constante c de sorte que les fonctions suivantes soient des densités de probabilité sur $\mathbb{R}$:

a) $\rho(x) = c e^{-ax} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ où a est un réel strictement positif;

b) $\rho(x) = -\ln(x^c) \mathbf{1}_{]a,1[}(x)$, où $a \in [0, 1[$ est un réel.

Rappel: Pour que ρ soit une densité de proba sur $\mathbb{R}$, il faut :

$$\rho \geq 0, \text{ Riemann-intégrable sur } \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$$

a) Il faut trouver $c > 0$ t.q. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} c e^{-ax} 1_{\mathbb{R}_+}(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} c e^{-ax} dx = c \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = c \cdot \frac{1}{a} = 1 \end{aligned}$$

il faut donc prendre $c = a > 0$

p est en fait la densité de la loi exponentielle de paramètre a

b) $p(x) = -\ln(x^c) 1_{]a,1[}(x)$ où $a \in [0,1[$
 $= -c \ln(x) 1_{]a,1[}(x)$

Lorsque $a < x < 1$, $\ln(x) < 0$

Il faut trouver $c > 0$ t.q. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} -c \ln(x) 1_{]a,1[}(x) dx = -c \int_a^1 \ln x dx \\ &= -c [x \ln x - x]_a^1 = -c (1 \ln 1 - 1 - (a \ln a - a)) \\ &= c(a \ln a - a + 1) \end{aligned}$$

Donc il faut $c = \frac{1}{a \ln a - a + 1} > 0$

Pour tout $x > 1$, $\ln x < x - 1$.

Si $0 < a < 1$, en prenant $x = \frac{1}{a}$, on obtient $\ln a > 1 - \frac{1}{a}$

⚠ Si $a = 0$, il faut prendre " $a \ln a$ " = $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ (et $c = 1$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-1 + \varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon) \\ &= -1 \end{aligned}$$

♡ **Exercice 8.3.** Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.

a) Montrer que $[nU]$ suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n-1\}$, où $n \geq 1$ (ici $[x]$ désigne la partie entière de x).

b) Déterminer la loi de $-\frac{1}{a} \ln U$, où $a > 0$ est un paramètre donné.

$$a) \quad U \in]0, 1[\quad nU \in]0, n[\quad [nU] \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$(\mathbb{P}(U=1)=0 \Rightarrow \mathbb{P}([nU]=n)=0)$$

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([nU]=k) &= \mathbb{P}(nU \in [k, k+1[) \\ &= \mathbb{P}\left(U \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\right) \\ &= \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1_{]0,1[}(x) dx = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Donc $[nU]$ est uniforme sur $\{0, 1, \dots, n-1\}$

$$b) \quad -\frac{1}{a} \ln U \in]0, +\infty[, \text{ où } a > 0$$

Méthode 1: fonction de répartition $F(t) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{a} \ln U \leq t\right)$

$$\text{Si } t \leq 0, \quad F(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Si } t > 0, \quad F(t) &= \mathbb{P}(\ln U \geq -at) = \mathbb{P}(U \geq e^{-at}) \\ &= 1 - e^{-at} \end{aligned}$$

Donc $-\frac{1}{a} \ln U$ a la même fonction de répartition que la loi exponentielle de paramètre a

$$\text{Ainsi } -\frac{1}{a} \ln U \sim \mathcal{E}(a)$$

Méthode 2: g fonction "test" continue et bornée arbitraire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(g\left(-\frac{1}{a} \ln U\right)\right) &= \int_0^1 g\left(-\frac{1}{a} \ln x\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} g(y) a e^{-ay} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{changement de variable} \\ &y = -\frac{1}{a} \ln x \\ &x = e^{-ay} \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) a e^{-ax} 1_{\mathbb{R}^+}(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } -\frac{1}{a} \ln U \text{ est abs. continue, admet comme densité } a e^{-ax} 1_{\mathbb{R}^+}(x) \\ \Rightarrow -\frac{1}{a} \ln U \sim \mathcal{E}(a) \end{aligned}$$

Exercice 8.4. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$, qui est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que Y suit une loi géométrique $\text{Géom}_0(p)$, et déterminer le paramètre p .

On rappelle que la loi $\text{Géom}_0(p)$ est la loi géométrique décalée de 1 : une variable aléatoire X suit la loi $\text{Géom}_0(p)$ si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (elle commence à 0 plutôt que 1) et $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k) = \mathbb{P}(X \in [k, k+1[) \\ &= \int_k^{k+1} f_X(x) dx = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx \\ &= \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \\ &= (e^{-\lambda})^k (1 - e^{-\lambda}) = (1-p)^k p \\ &\quad \text{où } p = 1 - e^{-\lambda} \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Donc $Y \sim \text{Géom}_0(1 - e^{-\lambda})$

TD18: Ex 8.5, 8.7 et 8.8

♥ **Exercice 8.5.** Soit X une ~~v.a.~~ v.a. réelle à densité, de densité $f_X(x)$. Déterminer si les variables aléatoires suivantes possèdent une densité, et si c'est le cas en déterminer une en fonction de f_X : a) $\alpha X + \beta$, où $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$; b) e^X ; c) X^2 ; d) $|X|$.

a) $Y = \alpha X + \beta, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\alpha X + \beta \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t - \beta}{\alpha}\right) \\ &= F_X\left(\frac{t - \beta}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{t - \beta}{\alpha}} f_X(x) dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^t f_X\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right) \frac{1}{\alpha} dy$$

$$x = \frac{y - \beta}{\alpha}$$

$$y = \alpha x + \beta$$

Donc $\frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right)$ est une densité de Y

b) $Y = e^X$

Fonction test $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \mathbb{E}(g(e^X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^x) f_X(x) dx$$

$$\stackrel{\substack{y=e^x \\ x=\ln y}}{=} \int_0^{+\infty} g(y) f_X(\ln y) \frac{1}{y} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_X(\ln y) \frac{1}{y} \underbrace{1_{]0, +\infty[}(y)} dy$$

Donc Y admet pour densité $f_X(\ln y) \frac{1}{y} 1_{]0, +\infty[}(y)$

c) $Y = X^2 \geq 0$ $F_Y(t) = 0$ pour $t < 0$

$$\forall t \geq 0, F_Y(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$$

$$= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

(F_X est continue)

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{t}} f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(x) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} f_X(x) dx + \int_{-\sqrt{t}}^0 f_X(x) dx$$

$$\begin{matrix} x = \sqrt{y} \\ y = x^2 \end{matrix}$$

$$\int_0^t f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

$$\int_0^t f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

$$F_Y(t) = \int_0^t \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} dy.$$

Donc $Y = X^2$ admet pour densité $\frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(y)$

d) $Y = |X|$ fonction test $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(Y)) &= \mathbb{E}(g(|X|)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(|x|) f_X(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} g(x) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^0 g(-x) f_X(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} g(x) f_X(x) dx + \int_0^{+\infty} g(x) f_X(-x) dx \quad \rightarrow y = -x \\ &= \int_0^{+\infty} g(x) \underbrace{(f_X(x) + f_X(-x))} dx \end{aligned}$$

Donc $Y = |X|$ admet pour densité $(f_X(y) + f_X(-y)) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(y)$

Exercice 8.7. Soit X et Y des v.a. réelles indépendantes, de loi $\mathcal{U}(0, 1)$.

- On pose $W = \max(X, Y)$ et $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi et l'espérance de W et de Z .
- Soient W_1, W_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que W et Z_1, Z_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que Z . Comparer les fonctions de répartition de $\min(W_1, W_2)$ et de $\max(Z_1, Z_2)$: l'une est-elle plus grande que l'autre ?

a) Rappel: Exercice 7.7

$$\begin{aligned} F_W(t) &= \mathbb{P}(\max(X, Y) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t \text{ et } Y \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X \leq t) \mathbb{P}(Y \leq t) = F_X(t) F_Y(t) \end{aligned}$$

$X \perp\!\!\!\perp Y$

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= 1 - \mathbb{P}(\min(X, Y) > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t \text{ et } Y > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > t) \mathbb{P}(Y > t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)) \\ &= F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t) F_Y(t) \end{aligned}$$

$X \perp\!\!\!\perp Y$

Ici X et Y ont la même loi, donc $F_X = F_Y$ et

$$F_W(t) = F_X(t)^2 \quad F_Z(t) = 2 F_X(t) - F_X(t)^2$$

Comme X admet une densité f_X

$$\Rightarrow \text{densité } f_W(t) = \frac{d}{dt} F_X(t)^2 = 2 F_X(t) \frac{d}{dt} F_X(t) = 2 F_X(t) f_X(t)$$

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= \frac{d}{dt} (2 F_X(t) - F_X(t)^2) = 2 f_X(t) - 2 f_X(t) F_X(t) \\ &= 2 f_X(t) (1 - F_X(t)) \end{aligned}$$

Si $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, $f_X(t) = 1_{]0,1[}(t)$ $F_X(t) = t$ pour $0 \leq t < 1$

$$f_W(t) = 2t 1_{]0,1[}(t) \quad f_Z(t) = 2(1-t) 1_{]0,1[}(t)$$

$$\mathbb{E}(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_W(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2t^2 1_{]0,1[}(t) dt$$

$$= \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t) dt = \int_0^1 2(1-t)t dt = \frac{1}{3}$$

b) Lemme (Exercice 7.3): Si $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$
alors $F_X(t) \geq F_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$(X \leq Y \Rightarrow F_X \geq F_Y)$$

Preuve: $\{Y \leq t\} \subset \{X \leq t\}$ car $X \leq Y$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) \leq \mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t) \quad \square$$

Application: $W = \max(X, Y) \geq Z = \min(X, Y) \Rightarrow F_Z \geq F_W$

Sans perte de généralité, on peut supposer que

X_1, X_2, Y_1, Y_2 des v.a. indép. de loi $\mathcal{U}(0,1)$

$$W_1 = \max(X_1, Y_1)$$

$$Z_1 = \min(X_1, Y_2)$$

$$W_2 = \max(X_2, Y_2)$$

$$Z_2 = \min(X_2, Y_1)$$

W_1, W_2 indép. de même loi que W Z_1, Z_2 indép. de même loi que Z

$$\begin{aligned} \min(W_1, W_2) &= \min(\max(X_1, Y_1), \max(X_2, Y_2)) \geq \min(X_1, Y_2) = Z_1 \\ &\text{car } \max(X_1, Y_1) \geq X_1 \text{ et } \max(X_2, Y_2) \geq Y_2 \\ \text{De même, } \min(W_1, W_2) &\geq \min(Y_1, X_2) = Z_2 \\ \text{Donc } \min(W_1, W_2) &\geq \max(Z_1, Z_2) \\ \text{Ainsi par le lemme, } F_{\min(W_1, W_2)} &\leq F_{\max(Z_1, Z_2)} \end{aligned}$$

♥ **Exercice 8.8.** Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- a) Calculer $M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- ♠ b) En déduire $\mathbb{E}(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ (Indication : développer $M_X(t)$ en série entière).
- c) Soit $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $\frac{1}{\sigma}(Y - \mu)$? En déduire la valeur de $M_Y(t) := \mathbb{E}(e^{tY})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx}_{\text{une densité normale}} \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{i! 2^i}$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$$

Par unicité de la décomposition en série entière, on a

$$\mathbb{E}(X^k) = 0 \quad \text{si } k \text{ impair}$$

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{(2i)!}{i! 2^i} \quad \text{si } k=2i, i \in \mathbb{N}$$

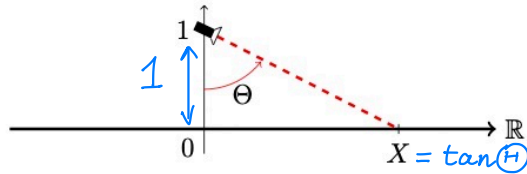
c) $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \sigma > 0$ densité de Y : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$X := \frac{1}{\sigma}(Y - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{t(\sigma X + \mu)}) = \mathbb{E}(e^{t\sigma X + t\mu}) \\ &= e^{t\mu} \mathbb{E}(e^{t\sigma X}) = e^{t\mu} M_X(t\sigma) \\ &= e^{\sigma^2 t^2 + t\mu} \end{aligned}$$

TD 19: Ex 8.11, 8.12 et 9.1

♥ **Exercice 8.11.** On suspend un laser à 1 m au dessus du sol. L'angle qu'il forme avec la verticale est aléatoire, notée Θ , et suit la loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On note X le point marqué au sol par le laser (voir la figure ci-dessous). Donner la densité de la loi de X .



On voit que $X = \tan(\Theta)$

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction de répartition de X

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\tan \Theta \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(\Theta \leq \arctan x)$$

$$= F_\Theta(\arctan x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F_\Theta(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + t \right) \quad \text{pour } t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$= 0 \quad \text{si } t \leq -\frac{\pi}{2}$$

$$= 1 \quad \text{si } t \geq \frac{\pi}{2}$$

F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
 Donc X admet pour densité $f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d \arctan x}{dx}$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Conclusion : X est une variable de **Cauchy**.

2nd méthode : g une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X)) &= \mathbb{E}(g(\tan \Theta)) = \int_{\mathbb{R}} g(\tan u) \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\tan u) du = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} g(v) \frac{1}{1+v^2} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx. \end{aligned}$$

Donc $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité de X .

Exercice 8.12. Soit X une v.a. **positive**, à densité.

- Montrer que le k -ème moment de X est toujours bien défini (mais peut valoir $+\infty$).
- Montrer que si $\mathbb{E}(X^k) < +\infty$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k \mathbb{P}(X > t) = 0$.
- Montrer que l'on a toujours $\mathbb{E}(X^k) = \int_0^\infty k t^{k-1} \mathbb{P}(X > t) dt$ (que $\mathbb{E}(X^k) < +\infty$ ou non).
- En déduire qu'une v.a. Y à densité admet un moment d'ordre k fini si et seulement si $t^{k-1} \mathbb{P}(|Y| > t)$ est intégrable.

a) Comme X est positive, $X^k \geq 0$ et $\mathbb{E}(X^k)$ est toujours bien définie dans $[0, +\infty]$

b) X positive, à densité f_X $\mathbb{E}(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k f_X(x) dx < +\infty$

Alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} x^k f_X(x) dx = 0$

Or $\int_t^{+\infty} x^k f_X(x) dx \geq \int_t^{+\infty} t^k f_X(x) dx = t^k \int_t^{+\infty} f_X(x) dx$

$$= t^k \mathbb{P}(X > t) \geq 0$$

(X à densité $\Rightarrow \mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(X \geq t)$)

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^k \mathbb{P}(X > t) = 0$

c) $\mathbb{E}(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k f_X(x) dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^z x^k f_X(x) dx$

On note $\bar{F}(t) = \mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$. On sait que $\bar{F}'(t) = -f_X(t)$

$$\int_0^z x^k f_X(x) dx = \int_0^z x^k (-\bar{F}'(x)) dx = \left[-x^k \bar{F}(x) \right]_0^z - \int_0^z -\bar{F}(x) \color{blue}{kx^{k-1}} dx$$

intégration par partie

$$= -z^k \bar{F}(z) + \int_0^z \bar{F}(x) kx^{k-1} dx$$

Si $\mathbb{E}(X^k) < +\infty$,

Par b), $\lim_{z \rightarrow +\infty} z^k \bar{F}(z) = 0$ et donc

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^z x^k f_X(x) dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^z \bar{F}(x) kx^{k-1} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \bar{F}(x) kx^{k-1} dx$$

Par conséquent, $\mathbb{E}(X^k) = \int_0^{+\infty} kx^{k-1} \mathbb{P}(X > x) dx$

Si $\mathbb{E}(X^k) = +\infty$, pour tout $z > 0$ on a toujours

$$\int_0^z x^k f_X(x) dx = -z^k \bar{F}(z) + \int_0^z \bar{F}(x) kx^{k-1} dx$$

$$\leq \int_0^z \bar{F}(x) kx^{k-1} dx$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^z x^k f_X(x) dx = \mathbb{E}(X^k) = +\infty$$

Donc $\int_0^{+\infty} \bar{F}(x) kx^{k-1} dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^z \bar{F}(x) kx^{k-1} dx = +\infty$

Par conséquent $\mathbb{E}(X^k) = +\infty = \int_0^{+\infty} kx^{k-1} \mathbb{P}(X > x) dx$

d) Y a densité $|Y|$ positive et à densité (Ex 8.5)

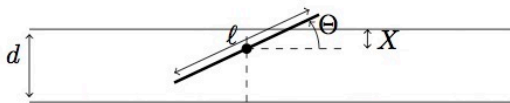
Y admet un moment d'ordre k fini

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(|Y|^k) < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(|Y|^k) = \int_0^{+\infty} k t^{k-1} \mathbb{P}(|Y| > t) dt < +\infty$$

$$\Leftrightarrow t^{k-1} \mathbb{P}(|Y| > t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+$$

♥ **Exercice 9.1.** (L'aiguille de Buffon) On lance une aiguille sur un parquet composé de planches parallèles, et on se demande quelle est la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur (au moins) une rainure du parquet. On suppose que les rainures du parquet sont à une distance d les unes des autres, et que l'aiguille est de longueur ℓ . On note X la distance du centre de l'aiguille à la rainure la plus proche, et Θ l'angle que fait la l'aiguille avec la direction des rainures.



L'hypothèse que l'on fait est que X est uniforme sur l'intervalle $[0, d/2]$ et que Θ est uniforme sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ (par symétrie du problème, cela suffit), et que les variables aléatoires X et Θ sont indépendantes.

a) Donner la densité jointe de (X, Θ) .

b) Montrer que "l'aiguille soit à cheval sur la rainure du parquet" correspond à l'événement $\{X < \frac{\ell}{2} \sin \Theta\}$.

c) On suppose que $\ell \leq d$. Montrer que $\mathbb{P}(X < \frac{\ell}{2} \sin \Theta) = \frac{2\ell}{\pi d}$.

$$a) \quad X \text{ de densité } \frac{2}{d} \mathbb{1}_{[0, \frac{d}{2}]}(x)$$

$$\textcircled{H} \text{ de densité } \frac{2}{\pi} \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{2}]}(t)$$

Comme $X \perp \textcircled{H}$, la densité jointe de $(X, \textcircled{H})$ est

$$f(x, t) = f_X(x) f_{\textcircled{H}}(t) = \frac{4}{\pi d} \mathbb{1}_{[0, \frac{d}{2}]}(x) \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{2}]}(t)$$

b) L'aiguille soit à cheval sur la rainure

$$\Leftrightarrow \text{elle intersecte la rainure du parquet} \Leftrightarrow \frac{\ell}{2} \sin \Theta > X$$

$$\begin{aligned}
c) \quad \mathbb{P}\left(X < \frac{\ell}{2} \sin(\Theta)\right) &= \int_{\{(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2 : x < \frac{\ell}{2} \sin t\}} f(x,t) dx dt \\
&\stackrel{(a)}{=} \int_{\{(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2 : x < \frac{\ell}{2} \sin t\}} \frac{4}{\pi d} \mathbb{1}_{[0, \frac{d}{2}]}(x) \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{2}]}(t) dx dt \\
\ell \leq d &\Rightarrow \frac{\ell}{2} \sin t \leq \frac{d}{2} \text{ pour tout } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\
\text{Donc } \mathbb{P}\left(X < \frac{\ell}{2} \sin(\Theta)\right) &\stackrel{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\ell}{2} \sin t} \frac{4}{\pi d} dx \right) dt \\
&= \frac{4}{\pi d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2} \sin t dt = \frac{2\ell}{\pi d} [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2\ell}{\pi d}
\end{aligned}$$

Remarque : Cette expérience fournit une approximation de π .

D'après la loi des grands nombres, soit p la proportion qui estime cette probabilité $\mathbb{P}\left(X < \frac{\ell}{2} \sin(\Theta)\right)$, alors on a un estimateur pour $\pi \approx \frac{2\ell}{pd}$.

TD20: Ex 9.5 et 9.6

♥ **Exercice 9.5.** Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Montrer (par récurrence) que $S_n := X_1 + \dots + X_n$ admet pour densité

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

$n=1$ vrai $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est la densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Supposons que ce résultat est vrai pour n . Pour $n+1$, on écrit

$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Comme $(X_1, \dots, X_n)$ est indép. de X_{n+1} , on a l'indép entre S_n et X_{n+1} .

Rappel (Proposition 5.31) $X \perp\!\!\!\perp Y$ à densité f_x et f_y

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y) f_y(y) dy$$

$$\begin{aligned}
f_{S_{n+1}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(x) f_{X_{n+1}}(z-x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda e^{-\lambda(z-x)} 1_{\mathbb{R}_+}(z-x) dx \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-1} e^{-\lambda z} 1_{[0, z]}(x) dx \right) 1_{\mathbb{R}_+}(z) \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} 1_{\mathbb{R}_+}(z) \int_0^z x^{n-1} dx \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} 1_{\mathbb{R}_+}(z) \frac{z^n}{n} = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} z^n e^{-\lambda z} 1_{\mathbb{R}_+}(z)
\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.

Exercice 9.6. Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes. Donner la loi de $X + Y$ quand :

a) X et Y suivent la loi uniforme sur $[-1, 1]$;

b) $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

a) (X, Y) de densité jointe $\frac{1}{4} 1_{[-1, 1]}(x) 1_{[-1, 1]}(y)$

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X+Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x+y) \frac{1}{4} 1_{[-1, 1]}(x) 1_{[-1, 1]}(y) dx dy \\
&= \frac{1}{4} \int_{[-1, 1]^2} h(x+y) dx dy
\end{aligned}$$

changement de variable $(x, y) \rightarrow (x, u = x+y)$

$$= \frac{1}{4} \int_D h(u) dx du$$

où $D = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x-1 \leq u \leq x+1\}$

$$= \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1, x \geq u-1, x \leq 1, x \leq u+1, -2 \leq u \leq 2\}$$

$$= \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : \max(-1, u-1) \leq x \leq \min(1, u+1), -2 \leq u \leq 2\}$$

$$\mathbb{E}(h(X+Y)) \stackrel{\text{Fubini intégrable}}{=} \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \left(\int_{\max(-1, u-1)}^{\min(1, u+1)} h(u) dx \right) du$$

$$\min(1, u+1) - \max(-1, u-1) = \begin{cases} u+1 - (-1) = u+2 & \text{si } -2 \leq u \leq 0 \\ 1 - (u-1) = 2-u & \text{si } 0 \leq u \leq 2 \end{cases} \\ = \min(u+2, 2-u)$$

$$\mathbb{E}(h(X+Y)) = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 h(u) \min(u+2, 2-u) du$$

La densité de $X+Y$ est donc $\frac{1}{4} \min(2+u, 2-u) \mathbb{1}_{[-2,2]}(u)$.

b) (X, Y) densité jointe $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}$. $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E}(h(X+Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x+y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

changement de variable $(x, y) \mapsto (x, u = x+y)$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} h(u) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + (u-x)^2}{2}} dx du$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{\text{intégrable}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{h(u)}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + x^2 - 2ux + u^2}{2}} dx \right) du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{h(u)}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 + ux - \frac{u^2}{2}} dx \right) du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{h(u)}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x - \frac{u}{2}\right)^2 - \frac{u^2}{4}} dx \right) du$$

changement de variable $(x, u) \rightarrow (x' = x - \frac{u}{2}, u)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{h(u)}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x')^2} dx' \right) du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{h(u)}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{4}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x')^2} dx' \right)}_{\sqrt{\pi}} du$$

Donc $X+Y$ admet pour densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}}$ (densité de la loi $\mathcal{N}(0, 2)$)

Rappel: $\varphi: V \rightarrow U$ $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme

$$\int_U g(x,y) dx dy = \int_V g(\varphi_1(s,t), \varphi_2(s,t)) |\det J_\varphi(s,t)| ds dt$$

TD 21: Ex 9.7 et 9.9

♥ **Exercice 9.7.** Soit X une variable aléatoire réelle **positive**, de densité $f(x)$, et soit $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ **indépendante** de X . Déterminer la loi de $Y = UX$. Donner f_Y si $X \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Vecteur aléatoire (U, X) admet pour densité $\frac{1}{[0,1]}(u) f(x) \frac{1}{[0,+\infty[}(x)$
(sur $\mathbb{R}^2$)

Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(UX)) = \int_{\mathbb{R}^2} h(ux) \frac{1}{[0,1]}(u) f(x) \frac{1}{[0,+\infty[}(x) du dx$$

$$= \int_{[0,1] \times [0,+\infty[} h(ux) f(x) du dx$$

$$= \int_{[0,1] \times [0,+\infty[} h(\varphi_1(u,x)) f(\varphi_2(u,x)) \frac{1}{\varphi_2(u,x)} |\det J_\varphi(u,x)| du dx$$

Changement de variable $(u, x) \in]0,1[\times]0,+\infty[\xrightarrow{\varphi} (v, x) \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{(u, x) \in \mathbb{R}^2; x \in]0,+\infty[, v \in]0, x[\}$$

$$J_\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} x & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_\varphi(u, x) = x$$

Ici on aurait du travailler avec le changement de variable

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{\mathcal{D}} h(v) f(x) \frac{1}{x} dv dx$$

$$\varphi^{-1}: (v, x) \in \mathcal{D} \rightarrow \left(\frac{v}{x}, x\right)$$

$$\det J_{\varphi^{-1}}(v, x) = \frac{1}{x}$$

$$= \int_{\{(v, x) \in \mathbb{R}^2; x \in]0,+\infty[, v \in]0, x[\}} h(v) f(x) \frac{1}{x} dv dx$$

$$= \int_{\{(v, x) \in \mathbb{R}^2; v \in]0,+\infty[, x \in]v, +\infty[\}} h(v) f(x) \frac{1}{x} dv dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{+\infty} h(v) \underbrace{\left(\int_v^{+\infty} f(x) \frac{1}{x} dx \right)}_{\text{densité de } Y} dv$$

Conclusion: $Y = UX$ admet pour densité $\left(\int_v^{+\infty} f(x) \frac{1}{x} dx \right) \frac{1}{[0,+\infty[}(v)$

- Si $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, $f(x) = 1_{]0,1[}(x)$

Alors pour $v > 0$,

$$\begin{aligned} \int_v^{+\infty} f(x) \frac{1}{x} dx &= \int_v^{+\infty} \frac{1}{x} 1_{]0,1[}(x) dx \\ &= \begin{cases} \int_v^{+\infty} 0 dx = 0 & \text{si } v \geq 1 \\ \int_v^1 \frac{1}{x} dx = -\ln v & \text{si } 0 < v < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc dans ce cas, la densité de $Y = UX$ est $-\ln(v) 1_{]0,1[}(v)$

Exercice 9.9. On note $D := \{(x,y); x^2 + y^2 < 1\}$ le disque ouvert de rayon 1, et on considère le vecteur aléatoire (X,Y) uniforme sur D , c'est-à-dire de densité $\frac{1}{\pi} 1_D(x,y)$.

- Déterminer les lois marginales de X et Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
- On (R, Θ) les coordonnées polaires de (X,Y) , c'est-à-dire $R \geq 0$ et $\Theta \in [0, 2\pi[$ tels que $X = R \cos \Theta$ et $Y = R \sin \Theta$. Déterminer la loi jointe de (R, Θ) et les lois marginales de R et Θ . Les v.a. R et Θ sont-elles indépendantes?

- X à valeurs dans $] -1, 1[$, sa densité $f_X(x) = 0$ si $x \notin] -1, 1[$

Soit $x \in] -1, 1[$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} 1_D(x,y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} 1_{\{-\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}\}}(y) dy \\ &= \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \end{aligned}$$

Donc la densité de X est $\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} 1_{]-1,1[}(x) = f_X(x)$

Par symétrie, $f_Y(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} 1_{]-1,1[}(y)$

Comme $\frac{1}{\pi} 1_D(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, X et Y ne sont pas indép.

(b) $\varphi: (r, \theta) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[\rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathcal{D} \setminus \{(x, y): x \geq 0, y = 0\}$
 est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $\det J_\varphi(r, \theta) = r$

$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée

$$\mathbb{E}(h(R, \Theta)) = \mathbb{E}(h(\varphi^{-1}(X, Y))) = \int_{\mathcal{D}} h(\varphi^{-1}(x, y)) \frac{1}{\pi} dx dy$$

$$= \int_{\mathcal{D} \setminus \{(x, y): x \geq 0, y = 0\}} h(\varphi^{-1}(x, y)) \frac{1}{\pi} dx dy$$

$$= \int_{]0, 1[\times]0, 2\pi[} h(\varphi^{-1}(\varphi(r, \theta))) \frac{1}{\pi} |\det J_\varphi(r, \theta)| dr d\theta$$

$$= \int_{]0, 1[\times]0, 2\pi[} h(r, \theta) \frac{1}{\pi} r dr d\theta$$

par le changement
de variable

Donc la densité jointe de (R, Θ) est

$$f_{(R, \Theta)}(r, \theta) = \frac{r}{\pi} \mathbb{1}_{]0, 1[\times]0, 2\pi[}(r, \theta)$$

$$= \frac{r}{\pi} \mathbb{1}_{]0, 1[}(r) \mathbb{1}_{]0, 2\pi[}(\theta)$$

$$= 2r \mathbb{1}_{]0, 1[}(r) \times \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{]0, 2\pi[}(\theta)$$

La densité de (R, Θ) s'écrit comme un produit de densités
 $f_1(r) \times f_2(\theta)$

Donc R et Θ sont indép, de densités respectives

$$2r \mathbb{1}_{]0, 1[}(r) \text{ et } \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{]0, 2\pi[}(\theta).$$

Remarque Θ est uniforme sur $]0, 2\pi[$.

Mais R n'est pas une v.a. uniforme.

TD 22 : Ex 10.1, 10.3 et 10.2

Exercice 10.1. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On pose $W_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ pour $n \geq 1$. Montrer que $(W_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers σ^2 .

$$Y_i = X_i^2, \quad i \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_i^2) = \text{Var}(X_i) = \sigma^2 < +\infty$$

$(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d., d'espérance finie

Grâce à la loi des grands nombres, on a

$$\left(W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right) \xrightarrow[n \geq 1]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(Y_i) = \sigma^2$$

Exercice 10.3. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(\ln X_i) = -\ln \lambda - \gamma$, où $\gamma = -\int_0^\infty (\ln x) e^{-x} dx \approx 0,577$ est la constante d'Euler-Mascheroni.

b) Montrer que $(\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{\lambda} e^{-\gamma}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbb{E}(\ln X_i) &= \int_0^{+\infty} \ln x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &\stackrel{y=\lambda x}{=} \int_0^{+\infty} (\ln y - \ln \lambda) e^{-y} dy \\ &= \int_0^{+\infty} (\ln y) e^{-y} dy - \ln \lambda \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \\ &= -\gamma - \ln \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \ln \left(\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$$

$(\ln X_i)_{i \geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d., d'espérance finie

$$\text{Grâce à la loi des grands nombres, } \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right) \xrightarrow[n \geq 1]{\mathbb{P}} \underbrace{-\gamma - \ln \lambda}_{\mathbb{E}(\ln X_i)}$$

Rappel $(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow \forall g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, (g(X_n)) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$

La fonction exponentielle est continue, donc

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \exp(-\gamma - \ln \lambda) = \frac{e^{-\gamma}}{\lambda}$$

Exercice 10.2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi, d'espérance finie μ , et soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue en μ .

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right) = f(\mu)$.

b) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{où } f \text{ est continue sur } [0, 1]);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (\text{où } x \in [0, 1] \text{ et } f \text{ est continue sur } [0, 1]);$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (\text{où } \lambda > 0, \text{ et } f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue et bornée})$$

a) Par la loi des grands nombres, $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$

Rappel $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \Rightarrow \forall f \text{ continue bornée sur } \mathbb{R},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(Y_n)) = \mathbb{E}(f(Y))$$

Ici, si f était continue partout sur $\mathbb{R}$, on aurait directement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right) = \mathbb{E}(f(\mu)) = f(\mu)$$

Pour la preuve dans le cas où f est seulement continue en μ , voir la correction.

b) 1. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. iid de loi $\mathcal{U}(0,1)$.

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right) \\ = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

2. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. de loi $\text{Bern}(x)$

$$X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, x)$$

$$\mathbb{E}(X_i) = x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right) \\ = f(x)$$

3. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. de loi $\text{Poi}(\lambda)$

$$X_1 + \dots + X_n \sim \text{Poi}(n\lambda)$$

$$\mathbb{E}(X_i) = \lambda$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right) \\ = f(\lambda)$$