Intégration et Probabilités – TD 12

Fonctions caractéristiques

Exercice 0. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que la loi de (X, Y) est
$$\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)\,dx\,dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

2. On suppose que la loi de (X, Y) est
$$\frac{1}{4\pi}e^{-x/2}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(y)\,dx\,dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

3. On suppose que la loi de (X, Y) est
$$\frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$
Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle. On écrit ϕ_X sa fonction caractéristique, définie par $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ_X est de classe C^n et que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X^{(k)}(t) = i^k\mathbb{E}\left[X^k\exp(itX)\right].$$
En particulier:
$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}[X^k] \tag{1}$$

2. On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}\left[X^2\right] = -\phi_X^{(2)}(0)$.

   Indication. On pourra considérer $\frac{\phi_X(t)+\phi_X(-t)-2}{t^2}$.

3. Soit $k \geq 2$ entier. On suppose que ϕ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2\rfloor$ (ici $\lfloor x\rfloor$ est la partie entière de x) donnés par (1).

4. ($\star$) Si ϕ_X est dérivable en 0, est-ce que X admet un moment d'ordre 1 ?

Exercice 2.

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\mathbf{1}_{|x|<1}$?
2. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-\cos(x))/(\pi x^2)$?

Exercice 3 (Transformée de Laplace)**.** Soit X une v.a. positive. On pose

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad L_X(\lambda) = \mathbb{E}\big[e^{-\lambda X}\big] = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x}\, \mathbb{P}_X(dx).$$

La fonction $L_X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est appelé la *transformée de Laplace* de X, ou de sa loi $\mathbb{P}_X$.

1. L_X est positive, décroissante, continue sur $\mathbb{R}_+$ et analytique sur $]0,\infty[$.
2. L_X admet une dérivée à droite finie en 0 si et seulement si $\mathbb{E}[X] < \infty$. Dans ce cas, on a $L'_X(0+) = -\mathbb{E}[X]$.
3. Plus généralement, L_X admet une dérivée $p^{\text{ième}}$ à droite en 0 si et seulement si X admet un moment d'ordre p. Dans ce cas,

$$L_X^{(p)}(0+) = (-1)^p\, \mathbb{E}[X^p].$$

Exercice 4 (Fonction génératrice)**.** Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose

$$\forall r \in [0,1], \varphi_X(r) = \mathbb{E}\big[r^X\big] = \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n \mathbb{P}(X=n).$$

La fonction $\varphi_X : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ est appelé la *fonction génératrice* de X, ou de sa loi $\mathbb{P}_X$.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X=p) = \frac{1}{p!}\varphi_X^{(p)}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ipu}\varphi_X(e^{iu})du.$$

2. X admet un moment d'ordre p si et seulement si φ_X admet une dérivée $p^{\text{ième}}$ à gauche en 1. Dans ce cas, on a

$$\varphi_X^{(p)}(1-) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)].$$

3. Soit Y une autre v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si l'ensemble $\{r \in [0,1] \colon \varphi_X(r) = \varphi_Y(r)\}$ admet un point d'accumulation $r_0 \in [0,1[$, alors $\varphi_X = \varphi_Y$ et X, Y ont même loi.

Exercice 5 (Problème des moments)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(2\pi \ln x)\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right).$$

Calculer $\int_{\mathbb{R}_+} x^k f(x)dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire des v.a. X et Y de densités respectives

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \text{ et } (1+\sin(2\pi\ln x))\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right)?$$

Exercice 6 (À préparer pour la prochaine fois)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Montrer que les variables aléatoires $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ sont indépendantes.

Exercice 7 (Queues de variables aléatoires)**.** Soit X une variable aléatoire réelle. On définit la *queue* de X par

$$\psi(x) = \mathbb{P}(|X| > x).$$

1. Si X est intégrable, montrer que

$$\lim_{x\to\infty} x\psi(x) = 0.$$

2. Si X est dans $\mathbb{L}^p$ avec $p \geq 1$, montrer que

$$\lim_{x\to\infty} x^p\psi(x) = 0.$$

3. Donner un équivalent de la queue de la loi d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Exercice 8. ($\star$) Soit X une variable aléatoire réelle de loi $P_X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$ symétrique (c'est-à-dire $a_k = a_{-k}$) et telle que $\sum_{k\geq 0} ka_k = \infty$. Le moment d'ordre 1 de X est-il fini? Trouver une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ telle que ϕ_X soit dérivable en 0. Comparer avec l'exercice 1.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On note $\phi_n(t) = \phi_{X_n}(t)$ la fonction caractéristique de X_n pour simplifier, et on suppose qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue en 0, telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(t).$$

1. Prouver que pour tout $a > 0$ on a

$$\mathbb{P}\Big(|X_n| > \frac{2}{a}\Big) \leq \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1 - \mathrm{Re}(\phi_n(u)))\, du = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1 - \phi_n(u))\, du.$$

2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u > 0$ et n_0 tels que pour $n > n_0$ on ait

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} |1 - \phi_n(t)| dt < \epsilon.$$

3. En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1, \qquad \mathbb{P}(|X_n| > a) < 2\epsilon.$$