Intégration et Probabilités – TD 2

Tribus et mesures

Exercice 0. Soit $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{0, 1, \ldots, n2^n - 1\}$ on note

$$A_n = \{x \in E \colon f(x) \geq n\}, \qquad B_{n,i} = \{x \in E \colon i2^{-n} \leq f(x) < (i+1)2^{-n}\},$$

et pour un entier $n \geq 1$ on pose

$$f_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbf{1}_{B_{n,i}} + n\mathbf{1}_{A_n}.$$

Soit $x \in E$ fixé. Que dire de la suite $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$?

Exercice 1 (Petites questions)**.** 1) Si l'on note λ la mesure de Lebesgue, rappelez pourquoi $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} 0 = 0.$$

Où est le problème ?

2) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus, est-ce que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est toujours une tribu?

3) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites de nombres réels, a-t-on toujours

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n?$$

Et si les deux suites sont bornées? Et si b_n converge ?

Exercice 2 (Lemme de Borel–Cantelli)**.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré (μ est une mesure positive), et soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{E}$. On rappelle que l'on note

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k, \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

1. Montrer que
$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \ ,$$
et que si $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) < \infty$, alors
$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .$$

2. (Lemme de Borel–Cantelli) On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que
$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

3. (Une application du lemme de Borel–Cantelli) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0,1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

$i.e.$ presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2+\varepsilon$".

Exercice 3 (Mesure sur $\mathbb{Z}$)**.** Existe-t-il une mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation ?

Exercice 4 (Opérations sur les tribus)**.**

1. Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?

2. On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

   Indication: On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le sous-ensemble $2\mathbb{N}$.

3. (Partiel 2010) Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Alexandra dit: alors nécessairement, il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$. A-t-elle raison?

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ deux sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$ constitués d'ensembles mesurables. On suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont stables par intersections finies et que pour tous $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, $\mu(A \cap B) = \mu(A)\,\mu(B)$. Montrer que pour tous $U \in \sigma(\mathcal{A})$ et $V \in \sigma(\mathcal{B})$ on a $\mu(U \cap V) = \mu(U)\,\mu(V)$.

Exercice 6 (Atomes des mesures positives)**.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\{x\} \in \mathscr{E}$ pour tout $x \in E$. On suppose également que μ est une somme de mesures finies. Notons $A_\mu := \{x \in E : \mu(\{x\}) > 0\}$ l'ensemble de ses atomes. Si $A_\mu = \varnothing$, la mesure μ est dite diffuse. Elle est dite purement atomique s'il existe $N \in \mathscr{E}$ tel que $E \backslash A_\mu \subset N$ et $\mu(N) = 0$.

1. Montrer que l'ensemble A_μ est dénombrable.

2. Montrer qu'il existe un unique couple de mesures (μ_d, μ_a) sur $\mathscr{E}$ avec μ_d diffuse et μ_a purement atomique tel que $\mu = \mu_d + \mu_a$.

Exercice 7 (À chercher pour la prochaine fois)**.**

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe O_ϵ un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) $\lambda(O_\epsilon) \leq \epsilon$.

2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe F_ϵ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\lambda(A \cap F_\epsilon) \geq \lambda(A) - \epsilon.$$

Exercice 8 (Ensembles de Cantor – à chercher pour la prochaine fois)**.**
Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0,1[$, et soit $K_0 = [0,1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.

2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.

3. On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n. Vérifier que
$$K_3 = \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n} \ ; \ (a_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$$
et qu'il est de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 9 ("Cardinal" d'une tribu)**.** Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu $\mathscr{E}$ infinie dénombrable. Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Pour tout $x \in E$, on définit l'atome de la tribu $\mathscr{E}$ engendré par x par
$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathscr{E} \,:\, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathscr{E}$ forment une partition de E.

2. Montrer que si $\mathscr{E}$ est au plus dénombrable alors $\mathscr{E}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathscr{E}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.

3. Conclure.

4. Donner une nouvelle démonstration de question 2 de l'exercice 4.

Exercice 10 (Support)**.** Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On pose
$$S := \{x \in \mathbb{R}^n; \mu(\mathrm{B}(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$
Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S \backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S. (On appelle S le support de la mesure μ.)

Exercice 11 ($\star$ – Mesure non-atomique)**.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathscr{E}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$ et tel que μ n'ait pas d'atomes. Montrer que l'image de μ est $[0,1]$ (c'est-à-dire que pour tout $t \in [0,1]$, il existe $A \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A) = t$).