Intégration et Probabilités – TD 3

Fonctions mesurables

Exercice -1. 1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe O_ϵ un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) $\lambda(O_\epsilon) \leq \epsilon$.

2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe F_ϵ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\lambda(A \cap F_\epsilon) \geq \lambda(A) - \epsilon.$$

Exercice 0 (Ensembles de Cantor)**.**
Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0,1[$, et soit $K_0 = [0,1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.

2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.

3. On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n. Vérifier que
$$K_3 = \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n} \; ; \; (a_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$$
et qu'il est de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 1 (Petites questions)**.**
1) Soit $f \colon \;]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pourquoi la fonction dérivée f' est-elle mesurable?

2) Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable et $(f_n \colon E \to \overline{\mathbb{R}})_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des x tels que $(f_n(x))_{n \geq 1}$ admette une limite finie est mesurable.

INDICATION: Pensez au critère de Cauchy.

Exercice 2 (Tribu engendrée par des fonctions)**.** Soit $f \colon X \to Y$ une application. Soient $\mathcal{F}$ une tribu sur X et $\mathcal{G}$ une tribu sur Y.

1. Montrer que $\{B \subset Y ; f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur Y. Elle est appelée *tribu image par f*.

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

2. On note $\sigma(f)$ la plus petite tribu sur X qui rende $f\colon X \to (Y, \mathcal{G})$ mesurable. Elle est appelée *tribu engendrée par* f.

   (a) Montrer que $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{G}\}$.

   (b) Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$. Alexandra dit : alors nécessairement, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. A-t-elle raison ?

3. Montrer que toute fonction $g\colon (X, \sigma(f)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable s'écrit $g = \varphi \circ f$ avec $\varphi\colon (Y, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

4. (EXEMPLE.) Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.

   (a) Montrer que $\sigma(f) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.

   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \sigma(f))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

5. Soit $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces mesurables, et soient $f_i\colon Y \to Y_i$, $i \in I$ des fonctions. On note $\sigma(f_i, i \in I)$ la tribu engendrée par la famille de fonctions $(f_i)_{i \in I}$, i.e. la plus petite tribu sur Y rendant les f_i mesurables.

   (a) Prouver que $\sigma(f_i, i \in I) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right)$.

   (b) Montrer que $f\colon (X, \mathcal{F}) \to (Y, \sigma(f_i, i \in I))$ est mesurable si, et seulement si, pour tout $i \in I$, l'application $f_i \circ f\colon (X, \mathcal{F}) \to (Y_i, \mathcal{B}_i)$ est mesurable.

Exercice 3 (Tribu de Baire)**.** Soit E un ensemble non-vide muni d'une topologie $\mathscr{T}$. La *tribu de Baire* associée à $\mathscr{T}$, notée $\mathrm{Baire}(E)$, est définie comme la tribu engendrée par les fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que sur un espace métrique (E, d), on a $\mathrm{Baire}(E) = \mathcal{B}(E)$.

Exercice 4 (Tribus produits)**.** Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ la tribu notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$. On note $\pi_X : X \times Y \to X$ et $\pi_Y : X \times Y \to Y$ les projections canoniques sur X et Y.

1. Prouver que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\pi_X, \pi_Y)$, autrement dit que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la plus petite tribu rendant π_X et π_Y mesurables.

2. Soit $f\colon (E, \mathscr{E}) \to (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ une application. On écrit $f(z) = (f_X(z), f_Y(z))$. Prouver que f est $(\mathscr{E}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ mesurable si et seulement f_X et f_Y sont respectivement $(\mathscr{E}, \mathcal{A})$ et $(\mathscr{E}, \mathcal{B})$ mesurables.

3. Prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pourra admettre que si $\mathcal{O}\left(\mathbb{R}^2\right)$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathcal{O}\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i ;\, U_i, V_i \text{ ouverts de } \mathbb{R}, I \text{ dénombrable}\right\}.$$

Exercice 5. Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f\colon (E, \mathscr{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) Montrer que si $\mu(E) \neq 0$, il existe $A \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.

b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Exercice 6 (Théorème d'Egoroff)**.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions réelles mesurables sur E et f une fonction réelle mesurable sur E telles que $f_n \to f$ μ-presque partout quand $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $\eta > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que
$$\mu\left(\bigcup_{j \geq n} \left\{ x \in E \colon |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) \leq \eta.$$

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{E}$ de mesure $\mu(A) \leq \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus A$.

3. Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on suppose que $\mu(E) = \infty$.

Exercice 7 (À chercher pour la prochaine fois)**.** Soit $\mathscr{C} = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu de $\mathscr{C}$ rendant les applications de "projection" $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x. Deviner la question, et y répondre !

Exercice 8 (Classe monotone, version fonctionnelle)**.** Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soit $\mathscr{P}$ un pi-système sur E tel que $\sigma(\mathscr{P}) = \mathscr{E}$. Soit $\mathscr{H}$ un ensemble d'applications de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble de fonctions $\mathscr{H}$ satisfait les propriétés suivantes.

1. $\mathscr{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (il contient donc la fonction nulle).

2. Pour tout $A \in \mathscr{P}$, on a $\mathbf{1}_A \in \mathscr{H}$.

3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}$ et $M \in \mathbb{R}_+$ sont tels que $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq M$ pout tout n, alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathscr{H}$.

Montrer que $\mathscr{H}$ contient toutes les fonctions réelles $\mathscr{E}$-mesurables bornées.

Exercice 9. Soit $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $N(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Exercice 10.

1. On munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète définie par $d(x,y) = \mathbf{1}_{x\neq y}$. Quelle est alors la tribu borélienne ? Est-ce que les tribus engendrées par les boules ouvertes et les boules fermées sont la tribu borélienne ?

2. Soient $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable, (X, d) un espace métrique et $f_n \colon (E, \mathscr{E}) \to (X, \mathcal{B}(X))$, $n \geq 1$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $f \colon (E, \mathscr{E}) \to (X, \mathcal{B}(X))$ est mesurable.

Exercice 11. ($\star$) Soit $f \colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.

On pourra admettre le résultat suivant (THÉORÈME DE LUSIN, prouvé ultérieurement): si une fonction $g \colon ([a,b], \mathcal{B}([a,b])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K_\epsilon \subset [a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \cap K_\epsilon^c) \leq \epsilon$ et la restriction de g à K_ϵ est continue.

Exercice 12. ($\star$) Est-ce que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ pour tous espaces métriques X, Y?