Intégration et Probabilités – TD 4

Intégration de fonctions mesurables

> "Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de *Riemann*. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale."
>
> — *Lebesgue 1901.*

Exercice 0. Soit $\mathscr{C} = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu de $\mathscr{C}$ rendant les applications de "projection" $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x. Deviner la question, et y répondre !

Exercice 1 (Mesure positive à densité)**.**
Soit $(E,\mathscr{E},\mu)$ un espace mesuré. Soit $f\colon E \to [0,\infty]$ une fonction $\mathscr{E}$-mesurable.

1. Pour tout $A \in \mathscr{E}$ on pose
$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu = \int_E \mathbf{1}_A f\,d\mu.$$
Vérifier que ν est une mesure positive sur $(E,\mathscr{E})$. On l'appellera *mesure de densité f par rapport à μ*, ce que l'on abrège en $\nu = f\mu$.

2. Si $g\colon E \to [0,\infty]$ est $\mathscr{E}$-mesurable, montrer que pour tout $A \in \mathscr{E}$, on a
$$\int_A g\,d\nu = \int_A gf\,d\mu.$$

Exercice 2 (Petites questions)**.**
1) On définit sur un espace mesuré $(E,\mathscr{E},\mu)$ une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 0}$ et une fonction mesurable f telle que $f_n \to f$ μ-p.p. On suppose que $\sup_{n\geq 0}\int_E |f_n|\,d\mu < \infty$. Montrer que f est intégrable.
2) (*Inégalité de Markov*). Soit $f \in \mathscr{L}^1(E,\mathscr{E},\mu)$. Montrer que pour tout $A > 0$,
$$\mu(\{|f| \geq A\}) \leq \frac{1}{A}\int_E |f|d\mu.$$

Exercice 3 (Exemples et Contre-exemples)**.**

1. Soit (f_n) une suite de fonctions positives convergeant μ-p.p. vers f. Supposons que $\int f_n d\mu \to c < \infty$. Montrer que $\int f d\mu$ est définie et appartient à $[0,c]$ mais ne vaut pas nécessairement c.

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

2. Donner un exemple de fonctions positives $(f_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles

$$\limsup \int f_n(x)dx > \int \limsup f_n(x)dx.$$

3. Donner un exemple de fonctions positives $(f_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles

$$\limsup \int f_n(x)dx < \int \limsup f_n(x)dx.$$

4. Construire une suite de fonctions continues f_n sur $[0,1]$, avec $0 \leq f_n \leq 1$, et telle que

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$

sans toutefois que la suite $(f_n(x))$ ne converge pour aucun x de $[0,1]$.

5. Dans le théorème de convergence dominée, vérifier, en donnant des exemples et contre-exemples, que si l'on oublie une hypothèse la conclusion peut rester vraie, ou pas !

6. Reprendre la question précédente avec le théorème de convergence monotone.

Exercice 4 (Uniforme continuité de l'intégrale)**.**
Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathscr{E}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.

1) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int |f| \mathbf{1}_{\{|f|>n\}} d\mu = 0$.

2) Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathscr{E},\ \ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$.

3) Si $f \colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue λ, que peut-on dire de la fonction $F \colon u \mapsto \int_{[0,u]} f d\lambda$?

Exercice 5.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $(E, \mathscr{E}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \int_E |f_n| d\mu < \infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \left(\int_E f_n d\mu \right) = \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n \right) d\mu.$$

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx,\ \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx.$$

Exercice 6 (À chercher pour la prochaine fois)**.**
Soit $\varphi \colon ([0,1], \mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $F \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par

$$F(t) = \int_{[0,1]} \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\ dx.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que F soit dérivable en 0.

Exercice 7 (Convergence en mesure)**.**
Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathscr{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite (f_n) converge vers f en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(|f - f_n| > \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

1. Montrer que si $\int_E |f - f_n| d\mu \to 0$, alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

2. Montrer que si $f_n \to f$ μ-p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

3. En utilisant le lemme de Borel–Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une sous-suite de (f_n) qui converge μ-p.p. vers f.

4. *Un théorème de convergence dominée plus fort*. On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$.

   (a) Montrer que $|f| \leq g$ μ-p.p.

   (b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que

   $$\int_E |f_n - f| d\mu \to 0.$$

5. *L'espace* $\mathbf{L}^0(E, \mu)$. On note $\mathbf{L}^0(E, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.

   (a) Montrer que l'on peut définir une distance sur $\mathbf{L}^0(E, \mu)$ par

   $$\delta(f, g) = \inf\{\varepsilon > 0\colon \mu(|f - g| > \varepsilon) \leq \varepsilon\},$$

   et que celle-ci métrise la convergence en mesure.

   (b) Montrer que $(\mathbf{L}^0(E, \mu), \delta)$ est complet.

   (c) Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbf{L}^0(E, \mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p.

Exercice 8 (Quand est-ce que la convergence p.p. implique la convergence dans $\mathscr{L}^1$?)**.**
Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$. Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ est dite **uniformément intégrable** si

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| d\mu = 0. \tag{1}$$

a) Montrer que toute famille finie de $\mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu)$ (noté $\mathscr{L}^1(\mu)$ dans la suite) est uniformément intégrable.

b) Montrer que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $\sup_{i \in I} \int |f_i| d\mu < \infty$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathscr{E}, \quad \mu(A) < \eta \Longrightarrow \forall i \in I, \int_A |f_i| d\mu < \varepsilon.$

c) Montrer que si deux familles $(f_i)_{i \in I}$ et $(g_i)_{i \in I}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour la famille $(f_i + g_i)_{i \in I}$.

d) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions qui converge μ-p.p. vers une fonction f. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$