Intégration et Probabilités – TD 8

Espaces $\mathbb{L}^p$

Exercice 1 (Petites questions)**.**

1. Donner un exemple de $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f \notin \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p > 1$, et un exemple de $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $p > 1$ telle que $f \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $g \in \mathbb{L}^p$ et que $f = g$ μ-p.p.
3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu) \cap \mathbb{L}^q(E, \mathscr{E}, \mu)$ avec $p, q \in [1, +\infty]$ et $p \neq q$. On suppose que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n \to \infty$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est séparable pour tout $p \in [1, \infty[$.

Exercice 3. Montrer que l'espace de suites bornées $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

RAPPEL (*Théorème d'Egoroff* – TD 3, Exercice 6).
Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$, et soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur E qui converge μ-p.p. vers une fonction f. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A_\varepsilon \in \mathscr{E}$ de mesure $\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tel que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $E \setminus A_\varepsilon$.

Exercice 4. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ bornée de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$, $p \in]1, \infty[$ et une fonction mesurable f sur $(E, \mathscr{E}, \mu)$ telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$.
2. Montrer que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^r$ quand $n \to \infty$ pour tout $r \in [1, p[$.
3. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Exercice 5 (Théorème de Lusin, version plus faible)**.** Soit $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\varepsilon \subset [a, b]$ tel que $\lambda([a, b] \cap K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ et f soit continue sur K_ε.

INDICATION : on pourra utiliser le théorème d'Egoroff et le fait que les fonctions continues sur $[a, b]$ sont denses dans $\mathbb{L}^1([a, b])$.

Exercice 6 (Lemme de Scheffé)**.** Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} ||f_n||_p = ||f||_p.$$

INDICATION : appliquer le lemme de Fatou à $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

Exercice 7 (Super Hölder – convolution "$\mathbb{L}^p * \mathbb{L}^q$"– à chercher pour la prochaine fois)**.**

1. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout et que
$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \,.$$
INDICATION : $|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \, (|f(x-y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \, (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \,.$

2. Soit $f \in \mathbb{L}^1$ et $g \in \mathbb{L}^p$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $|a| < \|f\|_1^{-1}$, l'équation $h - af * h = g$ possède une unique solution dans $\mathbb{L}^p$.

Exercice 8. Soit f une fonction mesurable sur $(E, \mathscr{E}, \mu)$, avec $\|f\|_\infty > 0$. Pour $0 < p < +\infty$, on pose
$$\varphi(p) := \int_E |f|^p d\mu, \quad \text{ et } \quad I := \left\{ p \in \mathbb{R}_+^* \colon \varphi(p) < \infty \right\}.$$

1. Montrer que I est un intervalle. Est-il fermé ? ouvert ?

2. Montrer que $\ln \circ \varphi$ est convexe sur I et que φ est continue sur I.

Exercice 9 (Continuité de l'opérateur de translation)**.**
Soient $h \in \mathbb{R}$ et $f \colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f$ par
$$\tau_h f(x) = f(x-h), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

2. On suppose $p < \infty$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ alors,
$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p &= 0, \\ \lim_{|h| \to +\infty} \|\tau_h f - f\|_p &= 2^{1/p} \|f\|_p \,. \end{aligned}$$
INDICATION : on pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.

3. Que deviennent les résultats de la question 2 si $p = \infty$?

4. ($\star$) Déduire des questions précédentes que si $\lambda(A) > 0$, alors l'ensemble $A - A = \{x - y \colon x \in A, y \in A\}$ contient un voisinage de 0. (Deuxième démonstration de l'année)

Exercice 10 (Inégalité de Hardy)**.** Soient $(X, \mathscr{X}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. On considère $\varphi \colon (X \times Y, \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \nu$, et F la fonction définie pour μ-p.p. $x \in X$ par $F(x) = \displaystyle\int_Y \varphi(x, y) \nu(dy)$.

1. Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que F vérifie l'inégalité $\|F\|_p \leq \displaystyle\int_Y \|\varphi(\cdot, y)\|_p \, \nu(dy)$.

2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ avec $p \in]1, \infty[$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ vérifie l'inégalité suivante (appelée *inégalité de Hardy*)
$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p \,.$$

Exercice 11.

1. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

2. En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}_+$, intégrable et de classe C^1 telle que $g' \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p \in [1, +\infty[$, alors $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.